МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА В ЭКОНОМИКЕ: ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА В ЭКОНОМИКЕ: ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Учебное пособие

Иркутск
Издательство Байкальского государственного университета
2020

УДК 519(075.8)
ББК 22.1я7
М34

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Составитель
канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Аксенюшкина
(кафедра математики и информатики БГУ)

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. Леонова
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. Мамонова

М34 Математические и инструментальные средства в экономике: дистанционное обучение : учеб. пособие / сост. Е.В. Аксенюшкина. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2020. – 126 с. – URL: http://lib-catalog.bgu.ru.

В учебном пособии кратко рассмотрены элементы теории вероятностей и основные методы оптимальных решений, приведены математические рекомендации по построению моделей различных экономических задач, также показаны методы их решения, в том числе с помощью MS Excel. Предложены варианты тестов или задачи для самостоятельного решения по каждой теме.

Для студентов специальности «Экономическая безопасность», обучающихся дистанционно.

УДК 519(075.8)
ББК 22.1я7

Оглавление

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предмет теории вероятностей

В окружающей нас жизни приходится сталкиваться с различными явлениями и фактами, наступление которых приписывается случаю, а сами явления и факты называются случайными. *Случайное явление* – это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Рассматривая массовое количество однородных случайных явлений, можно убедится в том, что наблюдаются определенные закономерности. Например, данные регистрации рождений в небольшом регионе, охватывающие короткий промежуток времени, не дают устойчивых отношений между количеством рождающихся мальчиков и девочек. По таким данным нельзя установить, хотя бы приближенно, соотношение между количеством рождений мальчиков и девочек. Но если собрать статистические данные по целой стране за длительный период времени (несколько десятилетий) и проанализировать их, то наблюдается определенная закономерность: на каждую тысячу рождений приходится в среднем 515 мальчиков.

Изучение закономерностей однородных массовых случайных величин составляет предмет теории вероятностей и основанной на ней математической статистике. При этом массовые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы.

Классификация событий

Каждая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Одними из основных понятий теории вероятностей являются понятия испытания и события.

Под *испытанием* или *экспериментом* понимается осуществление определенного комплекса действий или условий. При этом осуществлять эти действия можно неограниченное число раз, т.е. предполагается повторяемость испытания.

Каждое испытание или эксперимент заканчивается некоторым *событием* или *исходом*, т.е. *под событием понимается явление, которое наступает в результате осуществления определенного комплекса условий.*

События, как правило, обозначаются латинскими буквами: $A, B, C,...$

Пример 1.1. Бросают игральную кость для определения числа выпавших очков. Бросание кости – это испытание. Выпадение того или иного числа – это исход или событие. Это испытание допускает шесть разных исходов (выпадение любого числа от 1 до 6).

Различают *достоверное, невозможное* и *случайное* события.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания при выполнении определенного комплекса условий. Будем обозначать такое событие Ω.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет в данном испытании при выполнении определенного комплекса условий. Такое событие будем обозначать $\varnothing$ (пустое множество).

Событие называется *случайным* или *возможным*, если оно наступает или не наступает в результате данного испытания при выполнении определенного комплекса условий.

Пример 1.2. Подбрасывание монеты – испытание. «Падение монеты на поверхность земли» – достоверное событие, «монета улетела в космос» – невозможное событие, а «выпадение герба» или «выпадение решки» – это два случайных исхода данного испытания.

Виды случайных событий

Если в каждом испытании, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что A *влечет за собой событие* B (A *входит в* B) или B *включает событие* A, и обозначают $A \subset B$.

Пример 1.3. Подбрасываем игральную кость. Пусть событие A – «выпадение числа 3», B – «выпадение нечетного числа». Тогда $A \subset B$.

Действительно, $A = \{3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ и, следовательно, $A \subset B$.

Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то в этом случае события A и B называются *равносильными* или *эквивалентными* и обозначаются $A = B$.

Например, события «выпадение четного числа» и «выпадение числа, кратного двум» являются равносильными.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если появление события A влечет за собой появление события B.

События A и B называются *несовместными* (или *несовместимыми*), если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого, т.е. возможно появление только одного из этих событий.

События A и B называются *совместными* (или *совместимыми*), если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

Например, получение студентом на экзамене по одной дисциплине оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно» – события несовместные, а получение тех же оценок на экзаменах по разным дисциплинам – события совместные.

Несколько событий называются *единственно возможными*, если в результате испытания хотя бы одно из них обязательно должно произойти.

В примере 1.3 с игральной костью рассмотрим события: A_1 – «на кости выпадает единица», A_2 – «двойка», …, A_6 – «шестерка». Заметим, что эти события являются единственно возможными. Теперь рассмотрим события A – «выпадение числа, больше двух» и B – «выпадение числа, не превышающего четырех». Очевидно, что эти события также являются единственно возможными в данном испытании. При этом заметим, что события $A_1, A_2, ..., A_6$ являются несовместными, а события A и B – совместными.

Совокупность единственно возможных несовместных событий данного испытания называется *полной группой* (*полной системой*). Это означает, что в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий.

Рассматриваемые в предыдущем примере события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ образуют полную группу, так как в результате испытания кость обязательно упадет какой-либо гранью вверх, а это значит, что произойдет одно из указанных событий.

Противоположными называются два события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое событие принято обозначать через $\overline{A}$.

Выпадение на игральной кости четного и нечетного чисел является противоположными событиями.

События называются *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Если в предыдущем примере предположить, что имеется идеально симметричная игральная кость, изготовленная из однородного материала, то нет оснований считать, например, «выпадение тройки» более возможным, чем «выпадение пятерки». Таким образом можно считать, что события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ – равновозможные.

Алгебра случайных событий

Случайное событие – это, по сути, множество исходов эксперимента, благоприятствующих наступлению этого события. В связи с этим над событиями можно определить теоретико-множественные операции: *объединение* (*сложение*), *пересечение* (*умножение*) и *разность* событий.

Прежде чем переходить к определению указанных выше операций, отметим, что различные события и действия с ними удобно представлять, используя так называемые диаграммы Вьенна (по имени английского математика-логика Джона Вьенна), которые дают простую и полезную геометрическую интерпретацию рассматриваемых событий и операций над ними.

В качестве примера рассмотрим рис. 1, который демонстрирует два противоположных события.

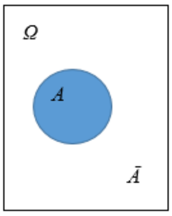


Рис. 1

Достоверное событие Ω представляется в виде квадрата, т.е. событие, состоящее в том, что точка принадлежит квадрату, представляет собой достоверное событие. Случайному событию A поставим в соответствие круг, лежащий внутри квадрата. При этом будем считать, что событие A произошло, если точка попала в круг. Если точка не принадлежит кругу, то наступает противоположное событие $\bar{A}$.

Суммой (*объединением*) нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий в результате испытания.

Сумму будем обозначать знаком «+» или «$\cup$».

Если имеется два совместных события A и B, то сумма $A+B$ означает наступление или события A, или B, или обоих событий вместе. Если же события несовместны, то событие $A+B$ заключается в том, что наступило событие A или событие B, так как совместное наступление событий A и B невозможно.

На диаграмме Вьенна (рис. 2) сумма событий $A+B$ представляет собой попадание точки во всю закрашенную область обоих кругов.

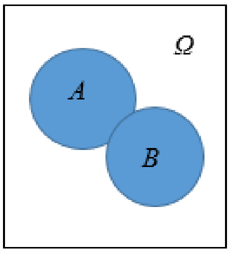


Рис. 2

Пример 1.4. В урне находятся белые, красные и синие шары. Случайным образом вынимается один шар. Предположим, что событие A – «вынут красный шар», B – «вынут синий шар». Событие $A+B$ означает, что произошло событие «вынут цветной шар» или «вынут не белый шар».

Произведением (*пересечением*) нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Произведение событий будем обозначать знаком «$\cdot$» или «$\cap$». Как правило, знак «$\cdot$» между событиями опускается.

Рассмотрим диаграмму Вьенна, соответствующую произведению двух событий (рис. 3).

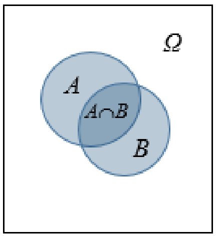


Рис. 3

Любая точка, попавшая в закрашенную область, обязательно попадет в область A и B. Это означает наступление события AB.

Пример 1.5. Пусть из колоды карт извлечена одна карта. Положим, что событие A состоит в том, что «извлечена дама», а событие B – «извлечена карта пиковой масти». Очевидно, что событие AB – «извлечена дама пиковой масти».

Разностью двух событий A и B называется событие, которое состоит в том, что событие A произойдет, а событие B не произойдет.

Разность событий A и B обозначается $A-B$ или $A \setminus B$.

На диаграмме Вьенна разность $A-B$ представляет собой закрашенную область (рис. 4).

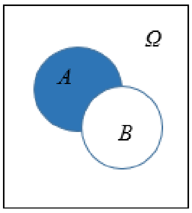


Рис. 4

Пример 1.6. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Пусть событие A – «первый стрелок поразил цель», B – «второй стрелок поразил цель». Тогда событие $A-B$ означает, что только первый стрелок попал в цель.

Используя операции сложения и умножения, можно сложное событие разложить на более простые события, и наоборот.

Пример 1.7. Пусть три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Рассмотрим следующие события: A_1 – «первый стрелок поразил мишень», A_2 – «второй стрелок поразил мишень», A_3 – «третий стрелок поразил мишень». Тогда, например, событие $A_1\overline{A}_2A_3$ означает, что «мишень поразили только первый и второй стрелки», а событие $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ – «мишень поразили только два стрелка».

Классическое определение вероятности

При проведении одного испытания его случайный исход предсказать невозможно. Однако при многократном повторении одного и того же испытания в одних и тех же условиях будут проявляться определенные закономерности в появлении интересующих нас случайных исходов. Действительно, одни случайные события будут наступать довольно часто, другие менее часто или совсем редко.

Числовая характеристика, показывающая степень объективной возможности появления события, называется *вероятностью* данного события.

Что представляет собой эта числовая характеристика? Как ее определить количественно?

Классическое определение вероятности дает возможность теоретического вычисления вероятности без проведения испытаний.

Пусть рассматриваемое испытание допускает n *равновозможных* исходов, которые составляют полную группу. Пусть при этом в m исходах $(m \le n)$ интересующее нас событие A наступает. Такие исходы благоприятствуют событию A.

Вероятность наступления события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу всех равновозможных исходов, составляющих полную группу. Вероятность появления события A обозначается через $P(A)$.

Итак, по определению,

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Пример 1.8. Бросают две монеты. Найти вероятность того, что выпадет: два орла; две решки; орел и решка.

Решение. Введем события: A – «выпадение двух орлов (О)», B – «выпадение двух решек (Р)», C – «выпадение орла и решки». Всевозможными исходами данного испытания являются следующие сочетания: ОО, ОР, РО, РР. Таким образом, имеем четыре случайных исхода ($n=4$) данного испытания, которые (в силу симметрии монет) являются равновозможными и образуют полную группу (в результате испытания одно и только одно из них обязательно наступает). Число исходов, благоприятствующих событию A, равно одному, событию B – также равно одному, а событию C благоприятствует два исхода. Следовательно, $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Пример 1.9. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что на обеих костях в сумме выпадет 5 очков.

Решение. Всевозможными исходами данного испытания являются любые возможные сочетания очков на двух костях. На одной кости может выпасть от 1 до 6 очков (6 исходов). С любым количеством очков на первой кости может сочетаться любой из шести исходов на второй кости. Таким образом, для двух костей возможно всего $n=6\cdot 6=36$ равновозможных (в силу симметрии игральных костей) исходов, образующих полную группу:

11	21	31	**41**	51	61
12	22	**32**	42	52	62
13	**23**	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Пусть событие A – «сумма очков, выпавших на костях, равна 5». Нужные 5 очков на двух костях могут получится только при следующих исходах: 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1. Значит, число исходов, благоприятствующих событию A, равно четырем. Тогда, согласно классическому определению, искомая вероятность равна $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Отметим *основные свойства вероятности*, которые следуют из приведенного выше определения.

1. *Вероятность любого события заключена между нулем и единицей*

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Действительно, число исходов, благоприятствующих наступлению любого события, удовлетворяет двойному неравенству $0 \le m \le n$. Поделим правые и левые части данного неравенства на положительное число n, получим $0 \le \frac{m}{n} \le 1$.

Следовательно, $0 \le P(A) \le 1$.

2. *Вероятность достоверного события равна единице, т.е.*

$$P(\Omega) = 1.$$

В самом деле, если событие Ω достоверное, то любой исход испытания благоприятствует этому событию, т.е. $m = n$. Таким образом, $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.

3. *Вероятность невозможного события* $\varnothing$ *равна нулю, т.е.*

$$P(\varnothing) = 0.$$

Действительно, если событие $\varnothing$ невозможное, то ни один из исходов испытания не благоприятствует ему. Следовательно, $m = 0$ и тогда $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

Обратное утверждение неверно. Если вероятность события A равна нулю, то говорить, что A есть невозможное событие, нельзя.

Основные понятия комбинаторики

Для успешного решения задач с помощью классического определения вероятности необходимо знать основные правила и элементы *комбинаторики*, или *соединений* (комбинаторика происходит от латинского слова «*combination*» – соединение).

Приведем два важных правила.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ – элементы конечного множества.

Правило суммы. Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, элемент a_2 может быть выбран n_2 способами, то выбор одного из элементов a_1 или a_2 может быть осуществлен $n_1 + n_2$ способами.

Пример 1.10. В пачке 100 лотерейных билетов. Известно, что 20 билетов содержат выигрыш по 100 р., 5 билетов – по 1 000 р. Остальные билеты не содержат выигрыш. Сколькими способами можно выбрать один из билетов, содержащих выигрыш?

Решение. Билет, содержащий выигрыш 100 р., можно выбрать $n_1 = 20$ способами, а 1 000 р. – $n_2 = 5$ способами. По правилу суммы существует $n_1 + n_2 = 20 + 5 = 25$ способов выбора выигрышного билета.

Это правило можно обобщить и на выбор одного элемента из трех и более элементов.

Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, элемент a_2 – другими n_2 способами, элемент a_3 – отличными от первых двух n_3 способами и т.д., элемент a_k – n_k способами, отличными о первых $(k-1)$, то выбор одного из элементов a_1 или a_2 … или a_k может быть осуществлен $(n_1+n_2+...+n_k)$ способами.

Правило произведения. Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами и после каждого такого выбора элемент a_2 может быть выбран n_2 способами, то выбор пары (a_1, a_2) в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2$ способами.

Пример 1.11. В группе 20 студентов. Необходимо выбрать старосту и его заместителя. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Старостой может быть выбран любой из $n_1 = 20$ студентов. Его заместителем – любой из оставшихся $n_2 = 19$ студентов. По правилу произведения число способов выбора старосты и его заместителя равно $n_1 \cdot n_2 = 20 \cdot 19 = 380$.

Это правило также можно обобщить и на выбор всех k элементов.

Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент a_2 может быть выбран n_2 способами и т.д. (после каждого $(k-1)$ выбора элемент a_k может быть выбран n_k способами), то выбор всех элементов a_1, a_2, …, a_k в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Факториалом натурального числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до n и обозначается $n!$, т.е.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Например

$1! = 1$;

$2! = 1 \cdot 2 = 2$;

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ и т.д.

По определению будем считать, что $0! = 1$.

Очевидно, что справедливо соотношение

$$n! = (n-1)!n.$$

Рассмотрим некоторое множество X, состоящее из n различных элементов. Из этого множества выбираются подмножества, состоящие из m элементов ($0 \le m \le n$).

Размещениями из n элементов по m называются такие подмножества, состоящие из m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо и тем и другим.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1). \quad (2)$$

Действительно, первый элемент размещения можно выбрать n способами. Для второго остается $(n-1)$ возможностей выбора, третий элемент можно выбрать $(n-2)$ способами и т.д. Элемент с номером m может быть выбран $(n-(m-1))$ или $(n-m+1)$ способами. Применяя правило произведения, получим формулу (2).

Пример 1.12. Школьное расписание одного дня состоит из 5 уроков по разным дисциплинам. Определить число вариантов расписания при выборке из 10 дисциплин.

Решение. Каждый вариант расписания представляет собой набор пять дисциплин из 10, отличающийся от других вариантов либо составом дисциплин, либо порядком их следования (либо и тем, и другим), т.е. является размещением из 10 элементов по 5. Число вариантов расписаний определяем по формуле

$$A_{10}^{5}=\frac{10!}{(10-5)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=30\,240\,.$$

Если комбинации, состоящие из n элементов, отличаются только порядком расположения этих элементов, то их называют *перестановками из n элементов.*

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n, и это то же самое, что число размещений из n элементов по n в каждом. Поэтому оно вычисляется формулой (2) при $n=m$. Итак,

$$P_n=A_n^n=n!. \tag{3}$$

Пример 1.13. Сколько различных трехзначных чисел, не содержащих одинаковые цифры, можно составить из цифр 1, 3, 5?

Решение. Каждое трехзначное число отличается только порядком расположения цифр, т.е. является перестановкой из 3 элементов. Их число определяем формулой (3)

$$P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6\,.$$

Действительно, это числа 135, 153, 315, 351, 513, 531.

Если комбинации из n элементов по m отличаются только составом элементов (порядок их следования неважен), то такие подмножества называются *сочетаниями.*

Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и определяется следующей формулой

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m}\,. \tag{4}$$

В самом деле, достаточно заметить, что всевозможные размещения получаются перестановками элементов в сочетаниях и, следовательно,

$$A_n^m=C_n^m\cdot m!\,,$$

откуда, учитывая формулу (2), получаем равенство (4).

Пример 1.14. Сколькими способами можно выбрать трех студентов из десяти для участия в конференции?

Решение. Из множества, состоящего из 10 элементов, выбирается подмножество, содержащее 3 элемента. Порядок расположения элементов неважен. Следовательно, это сочетания, число которых определяем по формуле

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = 120.$$

Непосредственный подсчет вероятности

Пример 1.15. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, случайным образом выбираются четыре студента для участия в конференции. Какова вероятность того, что среди выбранных студентов окажутся три юноши и одна девушка?

Решение. Пусть событие A – «среди выбранных студентов три юноши и одна девушка». Так как комбинации выбора 4 студентов из 25 отличаются только составом студентом (порядок неважен), то они представляют собой сочетания. Следовательно, общее число выбора 4 студентов из 25 равно $n = C_{25}^4$. При этом число выбора 3 юношей из 10 составит $m_1 = C_{10}^3$, а одной девушки – $m_2 = C_{15}^1 = 15$. По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию A, равно $m = m_1 \cdot m_2 = 15 \cdot C_{10}^3$. Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15\cdot C_{10}^3}{C_{25}^4} = \frac{15\cdot10!}{3!\cdot7!}\cdot\frac{4!\cdot21!}{25!} =$$

$$= \frac{15\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{22\cdot23\cdot24\cdot25} = \frac{36}{253} \approx 0{,}142.$$

Пример 1.16. Служащий банка утратил четырехзначный код одного из сейфов, состоящий из различных цифр. Какова вероятность того, что, набрав случайным образом четыре цифры, служащий банка откроет сейф?

Решение. Пусть событие A – «служащий банка открыл сейф». Общее число случаев выбора 4 различных цифр из 10 равно $n = A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7\cdot8\cdot9\cdot10 = 5040$, так как комбинации из 10 цифр по 4 представляют собой размещения, ибо отличаются не только составом цифр, но и порядком их следования. Число случаев, благоприятствующих событию A, равно $m = 1$, ибо только одна комбинация представляет собой шифр данного сейфа. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^4} = \frac{1}{5040} \approx 0{,}0002.$$

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий

Теорема. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Пример 1.17. Студенческая группа состоит из 20 человек, причем 15 из них – девушки. На студенческую конференцию случайным образом выбираются два студента. Какова вероятность того, что среди выбранных студентов есть хотя бы одна девушка?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что среди выбранных двух студентов есть хотя бы одна девушка. Если произойдет событие A, то обязательно произойдет одно из следующих несовместных событий: A_1 – «выбраны две девушки», A_2 – «выбраны девушка и юноша». Поэтому можно записать: $A = A_1 + A_2$.

Найдем вероятности событий A_1 и A_2. Двух студентов из 20 можно выбрать $C_{20}^2 = \dfrac{20!}{2!\cdot 18!} = 19\cdot 10 = 190$ способами, двух девушек из пятнадцати – $C_{15}^2 = \dfrac{15!}{2!\cdot 13!} = 7\cdot 15 = 105$ способами. Юношу и девушку по правилу умножения можно выбрать $15\cdot 5 = 75$ способами. Тогда $P(A_1) = \dfrac{105}{190}$, $P(A_2) = \dfrac{75}{190}$. Так как события A_1 и A_2 несовместны, то по теореме сложения получим $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \dfrac{105}{190} + \dfrac{75}{190} = \dfrac{180}{190} \approx 0{,}947$.

Следствие 1. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Если в рассмотренном выше примере 1.17. ввести дополнительно событие A_3 – «выбраны два юноши», вероятность которого равна $P(A_3) = \dfrac{C_5^2}{C_{20}^2} = \dfrac{10}{190} \approx 0{,}053$, то можно отметить, что события A_1, A_2 и A_3 образуют полную группу и, следовательно, сумма их вероятностей равна единице. Действительно,

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{105}{190} + \frac{75}{190} + \frac{10}{190} = 1.$$

Следствие 3. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Последнее следствие позволяет вычислять вероятность противоположного события по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Возвращаясь еще раз к предыдущему примеру 1.17, заметим, что события A и A_3 противоположные, поэтому вероятность события A можно вычислить более простым способом

$$P(A) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{10}{190} \approx 1 - 0{,}053 = 0{,}947\,.$$

Теорема сложения вероятностей для совместных событий

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности из совместного появления, т.е.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

В случае двух совместных событий A и B при вычислении вероятности суммы этих событий можно в качестве альтернативы использовать формулу

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B})\,.$$

Как нетрудно заметить из последней теоремы, при вычислении вероятности суммы совместных событий требуется уметь находить вероятность произведения событий. В связи со сказанным рассмотрим вопрос о нахождении вероятности произведения событий по их известным вероятностям.

Независимые события. Условная вероятность

Два события называют *независимыми*, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого. Если же вероятность появления одного события меняется после появления другого, то событие называют *зависимыми*.

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие ненулевой вероятности A уже наступило, называется *условной вероятностью* события B и обозначается $P_A(B)$ или $P(B \setminus A)$.

Очевидно, что для независимых событий A и B справедливо равенство

$$P_A(B) = P(B), \qquad P_B(A) = P(A)\,.$$

Пример 1.18. Из урны, в которой среди 15 шаров имеется 5 белых и 10 черных, извлекается один шар. Пусть событие A означает факт появления белого шара. Очевидно, что

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}\,.$$

После фиксирования результата извлеченный шар возвращается в ту же урну. Затем выполняется повторное извлечение одного шара. Пусть событие B означает факт повторного появления белого шара. Очевидно, что

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}\,.$$

События A и B здесь независимые, так как вероятность повторного извлечения белого шара не зависит от того, какой шар – белый или черный – был извлечен в первый раз.

Теперь предположим, что после первого извлечения шара из урны его не кладут обратно в урну. Тогда повторное извлечение шара из урны, имеющее своим результатом событие B, проходит в измененных условиях: общее число шаров в урне составляет уже не 15, а 14, и число исходов, благоприятствующих появлению события B, связано с цветом невозвращенного шара. Иначе говоря, события A и B являются зависимыми.

Вычислим условную вероятность $P_A(B)$. Если событие A уже наступило, т.е. первый шар был белый, то число благоприятствующих исходов будет равно 4. Следовательно,

$$P_A(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Теорема умножения вероятностей

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{5}$$

Пример 1.19. В ящике содержатся десять одинаковых деталей, три из которых бракованные. Какова вероятность того, что извлеченные случайным образом из ящика две детали будут бракованные?

Решение. Вероятность того, что первая взятая деталь будет бракованной (событие A), равна $P(A) = \frac{3}{10}$. После того как произошло событие A, в ящике осталось девять деталей, из которых две бракованные. Поэтому для события B, состоящего в извлечении второй раз бракованной детали, условная вероятность $P_A(B) = \frac{2}{9}$. Следовательно, вероятность появления двух бракованных деталей согласно формуле (5), равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

Замечание. Эту задачу можно было также решить с помощью непосредственного подсчета вероятностей событий, используя формулы комбинаторики. Действительно, число всевозможных исходов данного испытания равно

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45,$$

а число исходов, благоприятствующих событию C – появлению двух бракованных деталей, будет равно

$$m = C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3.$$

Тогда (согласно классическому определению вероятности события) получим

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}.$$

Следствие 1. *Если события A и B имеют ненулевую вероятность и несовместны, то они зависимы.*

Теорема умножения вероятностей принимает наиболее простой вид, когда события, образующие произведение, *независимы.*

Следствие 2. *Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей, т.е.*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (6)$$

Соотношение (6) можно рассматривать как способ установления независимости двух событий, т.е. справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Если для двух событий с ненулевой вероятностью выполняется равенство*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

то эти события независимы.

Пример 1.20. Из колоды в 52 карты выбирается одна. Пусть A – «выбор туза», B – «выбор карты пиковой масти». Зависимы ли события A и B?

Решение. Так как в колоде четыре туза, то $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Так как вся колода состоит из карт четырех мастей, то карт каждой масти $\frac{52}{4} = 13$. Поэтому $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Произведем непосредственный подсчет вероятности события AB, которое состоит в том, что выбран пиковый туз (одновременное наступление события A и B). В колоде только один пиковый туз, поэтому $P(AB) = \frac{1}{52}$.

Из сопоставления вероятностей $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ видно, что выполняется соотношение $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Следовательно, A и B – независимые события, согласно следствию 3.

Если в колоду добавлен джокер (карта, не имеющая масти), то те же события A и B становятся зависимыми. Действительно, в этом случае $P(A) = \frac{4}{53}$, $P(B) = \frac{13}{53}$, $P(AB) = \frac{1}{53}$ и $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Пример 1.21. Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$. Каждое из орудий производит по одному выстрелу. Найти:

a) вероятность попадания хотя бы одним из орудий;

b) вероятность попадания только из одного (не важно какого) орудия.

Решение.

a) Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A – «попадание в цель из первого орудия», и B – «попадание в цель из второго орудия», независимы. События совместны, ибо наступление одного из них не исключает появление другого.

Вероятность события AB – «оба орудия дали попадание», согласно следствию 2, равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56 .$$

Искомая вероятность $A + B$ – «попадание хотя бы одним из орудий», согласно теореме сложения вероятностей, равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94 .$$

b) Событие C – «мишень поражена только из одного орудия». Очевидно, что $C = A\overline{B} + \overline{A}B$. Следовательно,

$$P(C) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38 .$$

Пример 1.22. На каждой из десяти карточек написана одна из следующих букв: К, А, Б, А, У, Т, К, И, К, И. Карточки смешивают, а затем вынимают без возврата по одной пять карточек и раскладывают в ряд. Найти вероятность того, что получится слово «КУБИК».

Решение. Испытание заключается в вынимании карточек в случайном порядке без возврата. Пусть событие A_1 – «на первой карточке будет записана буква К», A_2 – «на второй карточке будет записана буква У», A_3 – «на третьей карточке будет записана буква Б», A_4 – «на четвертой карточке будет записана буква И» и A_5 – «на пятой карточке будет записана буква К». Следовательно, необходимо найти вероятность произведения пяти событий $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4) \cdot P_{A_1A_2A_3A_4}(A_5)$$

или

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2520} \approx 0{,}0004 .$$

Пример 1.23. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A), равна $P(A) = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B), равна $P(B) = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C), равна $P(C) = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$.

Так как события A, B и C независимы, то искомая вероятность равна

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504 .$$

Формула Бернулли

При решении целого ряда практических задач приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание повторяется многократно. Например, монета подбрасывается несколько раз, или стрелок производит по мишени несколько выстрелов и т.п. Если при этом в каждом отдельном испытании возможны только два исхода, то модель таких испытаний называется *схемой Бернулли*. Ее можно представить следующим образом.

Производится n последовательных независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить или не наступить. Будем считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность не наступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Поставим своей задачей вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие A осуществится ровно m раз и, следовательно, не осуществится $(n-m)$ раз. Эту вероятность обозначим через $P_n(m)$.

Теорема. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях, равна*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{7}$$

Формула (7) называется *формулой Бернулли.*

Пример 1.24. Вероятность того, что расход электроэнергии в течении суток не превысит установленной нормы, равна 0,2. Найти вероятность того, что в ближайшие 5 суток расход электроэнергии не превысит нормы в течение 3 суток.

Решение. В данной задаче имеет место схема Бернулли. Проводится $n = 5$ повторных независимых испытаний. В каждом испытании может наступить или не наступить событие A – «расход электроэнергии в течение суток не превысит нормы». Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна 0,2, т.е. $p = P(A) = 0{,}2$. Вероятность не наступления события A равна: $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Следовательно, согласно формуле Бернулли, вероятность того, что событие A наступит ровно три раза ($m = 3$) будет равна

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{5-3} = 0{,}0512.$$

Формула Пуассона

Теорема. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $n \cdot p = \lambda$ остается небольшим ($0 < \lambda \le 10$), то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно определяется формулой Пуассона*

$$P_n(m) \approx P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Пример 1.25. Завод отправил на базу 5 000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002.

Найти вероятность того, что на базу поступят:

a) три негодных изделия,

b) менее четырех негодных изделий,

c) более трех негодных изделий.

Решение. Данную задачу можно интерпретировать как проверку каждого поступившего на базу изделия. Схема испытания такова. Проводится достаточно большое, $n = 5000$, событие A – «изделие негодно» – наступает с одной и той же вероятностью $p = P(A) = 0{,}0002$. Следовательно, $\lambda = 5000 \cdot 0{,}002 = 1$. Итак, все условия последней теоремы выполнены.

Согласно приложению 1, получим:

a) $P_{5000}(3) = P_3(1) = 0{,}0613.$

b) $P_{5000}(m < 4) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) + P_{5000}(3) =$
$= 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 + 0{,}0613 = 0{,}9810$.

c) $P_{5000}(m > 3) = 1 - P_{5000}(m \le 3) = 1 - 0{,}9810 = 0{,}0190$.

Тест по теме «Случайные события»

1. Если в эксперименте возможны n элементарных исходов, а событие A наступает в результате m из них, то вероятность события A равна…

a) $\frac{m}{n-m}$;

b) $\frac{n}{m}$;

c) $\frac{m}{n}$;

d) $\frac{n-m}{n}$.

2. Вероятность достоверного события равна…

a) 0,99;

b) – 1;

c) 0;

d) 1.

3. Вероятность невозможного события равна…

a) 1;

b) – 1;

c) 0;

d) 0,0002.

4. Несовместные события не образуют полную группу событий, если их вероятности равны…

a) $P(A)=\frac{1}{5}$; $P(B)=\frac{1}{5}$; $P(C)=\frac{3}{5}$;

b) $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{4}$; $P(C)=\frac{1}{4}$;

c) $P(A)=\frac{1}{7}$; $P(B)=\frac{2}{7}$; $P(C)=\frac{4}{7}$;

d) $P(A)=\frac{1}{12}$; $P(B)=\frac{3}{4}$; $P(C)=\frac{3}{12}$.

5. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет 3 очка, равна…

a) 0,5;
b) 0,1;
c) $\frac{1}{6}$;
d) $\frac{1}{3}$.

6. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадает 1 или 2 или 6 очков, составляет…

a) 0,5;
b) $\frac{1}{3}$;
c) $\frac{1}{12}$;
d) $\frac{1}{9}$.

7. Из урны, в которой находится 4 белых и 9 черных шаров, вынимают наудачу один шар. Тогда вероятность того, что шар будет белым, равна…

a) $\frac{4}{13}$;
b) $\frac{2}{7}$;
c) 1;
d) $\frac{4}{9}$.

8. В ящике 11 белых, 3 красных и 6 синих шаров. Достают один шар. Вероятность того, что он белый, равна…

a) 0,45;

b) $\frac{9}{11}$;

c) 0,55;

d) $\frac{1}{3}$.

9. Вероятность того, что 1 сентября произвольно выбранного года придется на воскресенье, равна…

a) $\frac{12}{365}$;

b) $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{7}$;

d) $\frac{1}{365}$.

10. Из колоды в 36 карт достают одну карту. Чему равна вероятность того, что это валет или дама?

a) $\frac{2}{9}$;

b) $\frac{1}{4}$;

c) $\frac{1}{36}$;

d) $\frac{1}{9}$.

11. В ящике 65 годных и 35 бракованных деталей. Достают одну деталь. Чему равна вероятность того, что она бракованная?

a) 0,65;

b) $\frac{7}{13}$;

c) 0,5;

d) 0,35.

12. За контрольную по математике из 30 студентов группы пятеро получили оценку «5», 12 студентов – «4», 10 студентов получили тройки, а остальные двойки. Чему равна вероятность того, что наугад взятый студент группы получил двойку?

a) 0,1;

b) 0,15;
c) 0,2;
d) 0,25;
e) 0,3.

13. Теорема сложения вероятностей для совместных событий A и B определяется формулой…
a) $P(A+B)=P(A)+P(B)+P(AB)$;
b) $P(A+B)=P(AB)-P(A)-P(B)$;
c) $P(A+B)=P(A)+P(B)$;
d) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

14. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий A и B определяется формулой…
a) $P(AB)=P(A)P(B)-P(A+B)$;
b) $P(AB)=P(A)P_A(B)$;
c) $P(AB)=P_B(A)P_A(B)$;
d) $P(AB)=P(A)P(B)$.

15. Из карточек разрезной азбуки сложено слово АЛГЕБРА. Из этого слова наугад берут две карточки. Какова вероятность того, что на них нет ни буквы А, ни буквы Е?
a) $\frac{3}{4}$;
b) $\frac{4}{7}$;
c) $\frac{2}{7}$;
d) $\frac{1}{2}$.

16. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 наугад выбирают 3 цифры. Какова вероятность того, что они все нечетные?
a) $\frac{1}{2}$;
b) $\frac{1}{14}$;
c) $\frac{3}{14}$;
d) $\frac{1}{6}$.

17. В урне 21 белых и 19 черных шаров. Из урны вынимают сразу 2 шара. Вероятность того, что оба шара будут белыми, равна…

a) $\frac{1}{2}$;

b) $\frac{7}{26}$;

c) $\frac{1}{4}$;

d) $\frac{19}{80}$;

e) $\frac{13}{51}$.

18. Бросают два кубика. Событие A – «на первом кубике выпала тройка» и B – «на втором кубике выпала шестерка» являются…

a) несовместными и зависимыми;
b) совместными и зависимыми;
c) совместными и независимыми;
d) несовместными и независимыми.

19. Вероятность покупки неспелого арбуза на рынке равна 0,2. Некто каждый день покупает на рынке арбуз. Какова вероятность того, что в течение четырех дней он купит не менее 3 спелых арбузов?

a) 0,6354;
b) 0,7248;
c) 0,8192;
d) 0,8576.

20. Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,9. Найти вероятность того, что из четырех выстрелов он попадет в цель ровно 2 раза.

a) 0,0512;
b) 0,0240;
c) 0,0486;
d) 0,0832.

Понятие случайной величины

Случайная величина – одно из важнейших понятий теории вероятностей.

Под *случайной величиной* понимается величина, которая в результате испытания принимает то или иное числовое значение (заранее не известное) из множества своих возможных значений.

Приведем несколько примеров случайных величин:

1) число попаданий в мишень при n выстрелах,
2) число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости,

3) заработная плата работников некоторого предприятия,

4) рост наудачу взятого человека.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Случайная величина называется *дискретной*, если число ее возможных значений конечно или счетно (т.е. эти значения можно пронумеровать натуральными числами).

Если множество значений случайной величины несчетно и вероятность появления любого возможного значения равна нулю, то такая случайная величина называется *непрерывной.*

В этом случае число попаданий в мишень и число очков, выпавших на кости, – дискретные случайные величины. Заработная плата и рост человека – непрерывные случайные величины.

Для обозначения случайных величин возьмем следующие символы: $X, Y, \ldots$, а принимаемые ими значения будут соответственно $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$.

Таким образом, дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные друг от друга возможные значения, а непрерывная случайная величина может принимать любые значения из конечного или бесконечного промежутка.

Дискретные случайные величины. Законы распределения дискретной случайной величины

Связь случайной величины и случайного события заключается в том, что принятие случайной величиной некоторого числового значения из набора возможных (т.е. выполнение равенства $X = x_i$) есть случайное событие, характеризующееся вероятностью $P(X = x_i) = p_i$. Например, если X – число очков, выпавших на верхней грани при однократном подбрасывании игральной кости, то

$$P\{X = 2\} = P\{\text{выпала } 2\} = \frac{1}{6}.$$

Для определения случайной величины необходимо задать ее закон распределения. *Законом распределения* называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти значения.

Для дискретной случайной величины простейшей формой задания закона распределения является *ряд распределения*.

Рядом распределения дискретной случайной величины называется такая таблица, в которой перечислены все возможные значения этой случайной величины (без повторений) с соответствующими им вероятностями.

В общем виде ряд распределения для случайной величины, например, X, можно представить в виде

X	x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
	p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Из определения ряда распределения следует, что события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу событий. Поэтому имеем

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1,$$

или

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Данное равенство называется *основным свойством ряда распределения.*

Пример 2.1. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого равна 0,6, для второго – 0,8.

Составить закон распределения случайной величины X – общего числа попаданий в мишень.

Решение. Возможные значения данной случайной величины: 0, 1, 2 (0 – оба не попали, 1 – попал только один стрелок, 2 – оба попали). Введем события B_1 и B_2, состоящие соответственно в попадании в мишень первого и второго стрелков. Вычислим вероятности следующих событий:

$$P(X = 0) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) =$$
$$= (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08,$$
$$P(X = 1) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}12 + 0{,}32 = 0{,}44,$$
$$P(X = 1) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

Окончательный закон распределения случайной величины X имеет вид

X	x_i	0	1	2	$\sum$
	p_i	0,08	0,44	0,48	1

Пример 2.2. В коробке 3 белых шара и 2 красных. Составить закон распределения случайной величины X – числа белых шаров среди 2 извлеченных.

Решение. Случайная величина X может принимать следующие значения: $X = 0$, если все извлеченные шары будут красными, $X = 1$, если шары будут разного цвета, и $X = 2$, если оба шара белые. Используя классическое определение вероятности и элементы комбинаторики, определим необходимые вероятности:

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0{,}1,$$

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_5^2} = \frac{2 \cdot 3}{10} = 0{,}6,$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Таким образом, закон распределения будет иметь следующий вид

X	x_i	0	1	2	$\sum$
	p_i	0,1	0,6	0,3	1

Пример 2.3. В коробке 3 белых и 2 красных шара. Шары извлекаются последовательно до появления белого шара. Составить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров.

Решение. Из коробки последовательно извлекаются шары. Если первый извлеченный шар белый, то процесс извлечения прекращается. Если же извлеченный первый шар будет красным, то извлекается второй шар. Если второй шар белый, то процесс извлечения также прекращается, а если красный, извлекаем еще один шар. Третий шар обязательно будет белым, так как в коробке было только два красных шара, которые уже извлечены. Таким образом, возможные значения данной случайной величины: 1, 2, 3.

Найдем вероятности, с которыми случайная величина X принимает свои возможные значения.

Событие $(X = 1)$ наступает тогда и только тогда, когда первый из шаров оказывается белым, так как появление именно белого шара является сигналом к прекращению последующих извлечений. Поэтому

$$P(X = 1) = P(Б_1) = \frac{3}{5},$$

где событие $Б_1$ – «первый из извлеченных шаров белый».

Событие $(X = 2)$ (из коробки будет извлечено ровно 2 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый из извлеченных шаров оказывается красным, а второй – белым. Поэтому

$$P(X = 2) = P(K_1 \cdot Б_2) = P(K_1) \cdot P_{K_1}(Б_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10},$$

где событие K_1 – «первый из извлеченных шаров красный», $Б_2$ – «второй из извлеченных шаров белый».

Наконец, событие $(X = 3)$ (из коробки будет извлечено ровно 3 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый шар красный, второй красный, а третий белый. Обозначив через K_2 – «второй из извлеченных шаров красный» и $Б_3$ – «третий из извлеченных шаров белый», получим

$$P(X = 3) = P(K_1 \cdot K_2 \cdot Б_3) = P(K_1) \cdot P_{K_1}(K_2) \cdot P_{K_1K_2}(Б_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}.$$

Окончательно искомый закон распределения имеет вид

X	x_i	1	2	3	$\sum$
	p_i	0,6	0,3	0,1	1

Пример 2.4. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень.

Решение. Возможные значения для числа попаданий: 0, 1, 2, 3. Вероятности того, что случайная величина X примет эти значения, вычисляются по формуле Бернулли при $n = 3,\ p = 0{,}8,\ q = 0{,}2$:

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}008,$$
$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}096,$$
$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384,$$
$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot 0{,}8^3 \cdot 1 = 0{,}512.$$

Окончательно искомый закон распределения имеет вид:

X	x_i	0	1	2	3	$\sum$
	p_i	0,008	0,096	0,384	0,512	1

Полученный закон распределения является частным случаем так называемого *биномиального закона распределения* при $n = 3,\ p = 0{,}8.$

Функция распределения случайной величины

Закон распределения является исчерпывающей характеристикой дискретной случайной величины. Однако часто приходится рассматривать вероятности не отдельных значений данной случайной величины, а целых интервалов возможных значений, например, интервалов вида $(-\infty, x)$. Вероятность того, что значения случайной величины принадлежат интервалу $(-\infty, x)$, зависит от x, следовательно, она является функцией от переменной x. Итак, приходим к следующему определению

Функцией распределения случайной величины X называется такая функция $F(x)$, значение которой в точке x численно равно вероятности того, что в произвольном испытании значение случайной величины X окажется меньше чем x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения допускает простую геометрическую интерпретацию. Выберем произвольным образом на числовой оси Ox точку x_0. Тогда случайная величина X, принимающая в результате испытания конкретное числовое значение, может оказаться либо левее, либо правее точки x_0 или совпадать с ней. Очевидно, вероятность того, что случайная величина X будет располагаться строго левее точки x_0, зависит от ее положения на числовой оси, т.е. является функцией аргумента x и интерпретируется как вероятность того, что случайная величина X попадает левее заданной точки x_0.

Непосредственно из определения функции распределения случайной величины можно вывести ряд ее свойств.

Свойство 1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2. Функция распределения случайной величины является неубывающей функцией на всей числовой оси.

Свойство 3. Вероятность попадания случайной величины в полуинтервал $[x_1, x_2)$ *равна приращению ее функции распределения на этом полуинтервале, т.е.*

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Пример 2.5. Пусть закон распределения случайной величины имеет вид

X	x_i	1	2	4
	p_i	0,3	0,5	0,2

Найти функцию распределения этой случайной величины.

Решение. Возможные значения случайной величины X разбивают числовую ось на четыре промежутка. Рассмотрим каждый из полученных промежутков.

1. Для любого x, принадлежащего промежутку $(-\infty, 1]$, из вида закона распределения следует, что

$$F(x) = P(X < x) = 0,$$

так как событие ($X < x \le 1$) является невозможным.

2. Если $1 < x \le 2$, то левее числа x на числовой оси окажется только одно возможное значение случайной величины X, равное 1. Поэтому неравенство $X < x$ выполняется тогда и только тогда, когда случайная величина X примет значение, равное 1, и, следовательно, событие ($X < x$) произойдет, если наступит событие ($X = 1$), т.е. справедливо соотношение

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0{,}3.$$

3. Пусть $2 < x \le 4$. Очевидно, что теперь левее числа x на числовой оси окажутся уже два возможных значения случайной величины X, равные 1 и 2. Поэтому событие ($X < x$) наступит, если наступит любое, не важно какое, из событий ($X = 1$) или ($X = 2$). Так как эти события несовместные, то по теореме сложения вероятностей для несовместных событий получим

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

4. Наконец, при $x > 4$ все возможные значения случайной величины X будут лежать левее x, т.е. событие ($X < x$) будет достоверным и, следовательно, его вероятность равна 1. Таким образом, имеем

$$F(x) = P(X < x) = P(\Omega) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) =$$
$$= 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1.$$

Итак, функция распределения данной дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}8, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции распределения, соответствующий условиям рассмотренного примера, представлен на рис. 5.

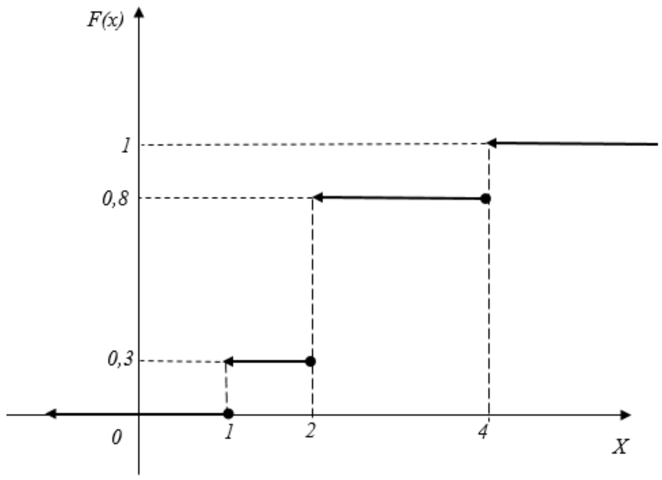


Рис. 5

Обобщая результаты решения последнего примера, можно заключить, что функция распределения дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, т.е. в промежутках между ее возможными значениями она не изменяется, а в точках, отвечающих возможным значениям, функция имеет разрывы, совершая скачки, равные вероятностям, соответствующим этим значениям. Сумма всех скачков функции распределения дискретной случайной величины равна 1.

Также можно сделать вывод о том, что в общем случае функция распределения дискретной случайной величины X определяется соотношением

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)=\sum_{x_i<x} p_i \, .$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины. Математическое ожидание

Для решения многих практических задач совсем не обязательно знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а достаточно указать отдельные параметры, которые позволяют в удобной, компактной форме отразить существенные особенности случайной величины. Эти параметры случайной величины называются ее *числовыми характеристиками*. Важнейшей числовой характеристикой является *математическое ожидание*.

Пусть закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид

X	x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
	p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число MX, равное сумме произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности, т.е.

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n. \tag{8}$$

Смысл математического ожидания случайной величины – это среднее значение случайной величины, а точнее, число, около которого при достаточно большом количестве испытаний группируется среднее арифметическое ее реализовавшихся значений.

Пример 2.6. Пусть случайная величина X имеет следующее распределение

X	x_i	0	1	2	3	$\sum$
	p_i	0,008	0,096	0,384	0,512	1

Вычислить ее математическое ожидание.

Решение. По формуле (8) имеем

$$MX = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = 2{,}4.$$

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной $MC = C$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания $M(CX) = C \cdot MX$.

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины – *зависимы*.

Определим произведение независимых случайных величин X и Y как случайную величину $X \cdot Y$, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения $X \cdot Y$ равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

Например, если вероятность возможного значения x_1 равна p_1, а вероятность возможного значения y_1 равна q_1, то вероятность возможного значения $x_1 y_1$ равна $p_1 q_1$.

Заметим, что некоторые произведения $x_i y_j$ могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения произведения равна сумме соответствующих вероятностей. Например, если $x_1y_2 = x_3y_3$, то вероятность значения x_1y_2 равна $p_1q_2 + p_3q_3$.

Например, рассмотрим две случайные величины, заданные таблицами

X	x_i	0	1
	p_i	0,2	0,8

Y	y_i	1	2
	p_i	0,3	0,7

Тогда, новая случайная величина, представляющая произведение независимых случайных величин X и Y, имеет закон распределения следующего вида

$X \cdot Y$	0	1	2
p_i	0,2	0,24	0,56

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$.

Определим сумму случайных величин X и Y как случайную величину $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y. Вероятность возможных значений $X + Y$ для независимых случайных величин X и Y равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность другого.

Свойство 4. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий этих величин $M(X \pm Y) = MX \pm MY$.

Это справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

Благодаря свойствам математического ожидания, многие задачи на вычисление числовых характеристик не требуют вычисления закона распределения новых случайных величин.

Пример 2.7. Пусть X и Y – независимые случайные величины с математическим ожиданием $MX = 3$, $MY = 4$. Найти математическое ожидание случайной величины $2 \cdot X + 3 \cdot Y - 2 \cdot X \cdot Y$.

Решение. Воспользуемся свойствами математического ожидания

$$M(2 \cdot X + 3 \cdot Y - 2 \cdot X \cdot Y) = 2 \cdot MX + 3 \cdot MY - 2 \cdot MX \cdot MY =$$
$$= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 + 12 - 24 = -6.$$

Для определения случайной величины недостаточно знать только математическое ожидание. Эта характеристика не дает полного представления о возможных значениях случайной величины. Рассмотрим другие характеристики.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Математическое ожидание не может в достаточной степени характеризовать случайную величину, поскольку встречаются случайные величины, имеющие одинаковые математические ожидания, но принимающие резко отличающиеся значения.

Пример 2.8. Пусть дискретные случайные величины X и Y имеют следующие законы распределения

X	x_i	1	3	5
	p_i	0,1	0,3	0,6

и

Y	y_i	– 10	5	10
	p_i	0,2	0,4	0,4

Найдем математические ожидания этих случайных величин. Имеем

$$MX = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}6 = 4,$$

$$MY = -10 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}4 = 4.$$

Итак, данные случайные величины имеют равные математические ожидания. Заметим, однако, что у случайной величины X отклонения возможных значений от ее математического ожидания меньше, чем у случайной величины Y. Поэтому целесообразно ввести характеристику случайной величины, отражающую меру рассеивания значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Дисперсией DX случайной величины X называется математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания MX, т.е.

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Намного чаще для вычисления дисперсии используется следующее утверждение.

Дисперсия DX случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания

$$DX = MX^2 - (MX)^2. \tag{9}$$

Случайная величина и ее математическое ожидание имеют одну и ту же размерность, а дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Поэтому в приложениях чаще используется другая числовая характеристика рассеивания – *среднее квадратическое отклонение.*

Средним квадратическим отклонением σ_X называется арифметический корень из дисперсии, т.е.

$$\sigma_X = \sqrt{DX}. \tag{10}$$

Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Например, если X – средняя заработная плата , которая измеряется в рублях, то DX измеряется в рублях в квадрате, а σ_X – в рублях.

Пример 2.9. Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной законом распределения

X	x_i	1	3	5	$\sum$
	p_i	0,1	0,3	0,6	1

Решение. В примере 2.7 было вычислено математическое ожидание этой случайной величины $MX = 4$. Согласно формулам (9) и (10) получим

$$DX = 1^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 5^2 \cdot 0{,}6 - 4^2 = 1{,}8,$$

$$\sigma_X = \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}34.$$

Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю $DC = 0$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за дисперсии, возведя его в квадрат $DCX = C^2 \cdot DX$.

Свойство 3. Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме (разности) дисперсий этих величин $D(X \pm Y) = DX + DY$.

Непрерывные случайные величины

Непрерывная случайная величина в отличие от дискретной случайной величины не может характеризоваться вероятностью ее конкретного значения, так как таких значений бесконечное множество. То есть закон распределения не может выглядеть в виде таблицы.

Для характеристики непрерывной случайной величины используется функция распределения вероятностей, которая представляет собой вероятность события $X < x$: $F(x) = P(X < x)$.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция», смысл которого поясним чуть позже. Теперь дадим более точное определение непрерывной случайной величины.

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна в любой точке x. Перечислим свойства функции распределения непрерывной случайной величины.

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку от нуля до единицы

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2. Функция распределения случайной величины является неубывающей функцией на всей числовой оси, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$, *если* $x_1 < x_2$.

Свойство 3. Вероятность попадания случайной величины в полуинтервал $[x_1, x_2)$ *равна приращению ее функции распределения на этом полуинтервале, т.е.*

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Пример 2.10. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3, \\ 1+\dfrac{x}{3}, & -3<x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в полуинтервале $[-1; 0)$.

Решение. По формуле свойства 3 имеем:

$$P(-1\le X<0)=F(0)-F(-1)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Следует отметить, что при вычислении вероятности попадания случайной величины в интервал, формула не меняется. Это полностью объясняет:

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, равна нулю.*

Таким образом, для вычисления вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал, не является существенным, включены или нет границы интервала.

Свойство 4. Если возможное значение случайной величины принадлежит интервалу $(a; b)$*, то* $F(x)=0$ *при* $x\le a$ *и* $F(x)=1$ *при* $x\ge b$.

Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси x, то справедливо следующие предельные соотношения

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

Это очевидно вытекает из определения функции распределения. Событие $(X<-\infty)$ является невозможным, а $(X<+\infty)$ – достоверным.

Плотность вероятности и ее свойства

Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственно возможным. Во многих случаях ее можно задать с помощью другой функции, которая называется *плотностью вероятности*.

Пусть имеем непрерывную случайную величину X с функцией распределения $F(x)$, относительно которой дополнительно будем предполагать, что она дифференцируема везде, кроме, быть может, конечного числа точек.

Плотностью вероятности (*плотностью распределения* или просто *плотностью*) непрерывной случайной величины X называется функция

$$f(x)=F'(x),$$

где $F(x)$ – функция распределения данной случайной величины.

График плотности вероятности называется *кривой распределения.*

Из определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения. В связи с этим, иногда функцию плотности называют дифференциальной функцией распределения, а функцию распределения вероятностей – интегральной функцией распределения.

Перечислим свойства функции плотности вероятности непрерывной случайной величины.

Свойство 1. Плотность вероятности – неотрицательная функция, т.е.

$$f(x) \geq 0.$$

Свойство 2. Для непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ справедлива формула

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Свойство 4. Справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Пример 2.11. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в полуинтервале $(0{,}5;1)$.

Решение. Воспользуемся свойством 2 для функции плотности вероятности:

$$P(0{,}5 < X < 1) = \int_{0{,}5}^{1} 2xdx = x^2\Big|_{0{,}5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Пример 2.12. Найти функцию распределения по данной плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5, \\ \dfrac{1}{5}, & 5 < x \leq 10, \\ 0, & x > 10. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся свойством 3.

Если $x \leq 5$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $5 < x \leq 10$, то $f(x) = \dfrac{1}{5}$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{5} 0dx + \int_{5}^{x} \frac{1}{5}dx = 0 + \frac{1}{5}t\Big|_{5}^{x} = \frac{1}{5}(x-5).$$

Если $x \geq 10$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{5} 0dx + \int_{5}^{10} \frac{1}{5}dx + \int_{10}^{x} 0dx = 0 + \frac{1}{5}(10-5) + 0 = 1.$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 5,\\ \frac{1}{5}(x-5), & 5<x\le 10,\\ 1, & x>10.\end{cases}$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия

Чтобы получить формулы для математического ожидания MX и дисперсии DX достаточно в соответствующих формулах для дискретной случайной величины заменить знак суммирования по всем ее значениям знаком интеграла с бесконечными пределами, дискретный аргумент x_i – непрерывно меняющимся x, а вероятность p_i – элементом вероятности $f(x)dx$.

В результате получим следующие формулы для математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины X

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx.$$

В предположении, что функция плотности отлична от нуля только на промежутке от a до b, формулы для математического ожидания и дисперсии принимают вид

$$MX=\int_a^b xf(x)dx,$$

$$DX=\int_a^b (x-MX)^2 f(x)dx.$$

Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы

$$DX=\int_a^b x^2 f(x)dx-(MX)^2 \qquad (11)$$

для $X\in[a;b]$,

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(MX)^2 \text{ для } X\in[-\infty;+\infty].$$

Пример 2.13. Найти числовые характеристики случайной величины X, если известна функция распределения этой величины

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание будет иметь вид

$$MX = \int_0^2 x \cdot f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2 = 1.$$

Дисперсию подсчитаем двумя способами – по определению и по формуле (11)

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}(x-1)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2 - 2x + 1)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\right|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$DX = \int_a^b x^2 f(x)dx - (MX)^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}dx - 1^2 = \left.\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - 1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Среднее квадратическое отклонение будет иметь вид

$$\sigma_X = \sqrt{DX} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Заметим, что в данном примере вычислять дисперсию проще и быстрее, используя формулу дисперсии (11), а не определение.

Тест по теме «Случайные величины»

1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше чем x, – это…

a) плотность распределения;

b) функция распределения.

2. Если $F(x)$ – функция распределения случайной величины X, то $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \ldots$

a) 1;

b) $+\infty$;

c) 0;

d) 0,5.

3. Если $F(x)$ – функция распределения случайной величины X, то $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ldots$

a) 1;
b) $+\infty$;
c) 0;
d) 0,5.

4. Если $F(x)$ – функция распределения, $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X, то …

a) $f(x) = F'(x)$;
b) $f(x) = F(x) - F(0)$;
c) $f(x) = 0{,}5[F(x) - F(0)]$;
d) $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$.

5. Если $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \ldots$

a) $+\infty$;
b) 0;
c) 0,5;
d) 1.

6. По какой формуле вычисляется математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения …

a) $MX = p_1 + \ldots + p_n$;
b) $MX = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$;
c) $MX = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, p_i$;
d) $MX = x_1 + \ldots + x_n$.

7. По какой формуле вычисляется математическое ожидание непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)$ …

a) $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$;
b) $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)dx$;

c) $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$;

d) $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

8. Упрощенная формула вычисления дисперсии случайной величины X …
a) $DX = MX^2 - 2MX$;
b) $DX = MX^2 - (MX)^2$;
c) $DX = MX - \sqrt{MX}$;
d) $DX = MX^2 - MX$.

9. Дан закон распределения дискретной случайной величины X

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	a	0,2	0,6

Тогда значение параметра a равно …
a) 0,1;
b) – 0,9;
c) 0,2;
d) 0,9.

10. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	1	2	4	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Тогда значение функции распределения $F(3)$ равно …
a) 0,7;
b) 0,2;
c) 0,9;
d) 0,3.

11. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

x_i	– 3	– 1	0	1	3
p_i	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

Найти MX .
a) – 0,1;
b) 0,1;

c) 0,3;
d) 0,5.

12. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1

Найти DX .
a) 1,33;
b) 1,63;
c) 1,81;
d) 1,96.

13. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей

x_i	2	5	8
p_i	0,2	0,3	0,5

Дисперсия равна…
a) 3,69;
b) 5,49;
c) 7,81;
d) 9,33.

14. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей

x_i	– 1	– 2	5
p_i	0,1	0,2	0,7

Математическое ожидание равно…
a) 4,5;
b) 3,5;
c) 3;
d) 2.

15. Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0{,}2, & 2 < x \le 4, \\ 0{,}7, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(3 \le X \le 6)$ равна …

a) 0,2;
b) 0,9;
c) 0,7;
d) 0,8.

16. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} C, & x \le 2, \\ 2x - 4, & 2 < x \le 2{,}5, \\ 1, & x > 2{,}5. \end{cases}$$

Тогда значение C равно …

a) 2,25;
b) 1;
c) 0;
d) 0,5.

17. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ 1 - x^2, & -1 < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда значение плотности распределения случайной величины в точке $x = -\dfrac{1}{2}$ равно …

a) 0,5;
b) 0,75;
c) 1;
d) 0,25.

18. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Тогда вероятность того, что эта случайная величина примет значение, заключенное в интервал (2, 4) равна …

a) $\dfrac{4}{9}$;
b) $\dfrac{5}{9}$;
c) $\dfrac{2}{9}$;
d) $\dfrac{1}{9}$.

19. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3, \\ x-3, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти MX.

a) 3,2;

b) 3,5;

c) 3,6;

d) 3,8.

20. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3, \\ x-3, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти DX.

a) $\frac{1}{3}$;

b) $\frac{1}{4}$;

c) $\frac{1}{6}$;

d) $\frac{1}{12}$.

Основные законы распределения дискретной случайной величины

Рассмотрим некоторые основные виды распределения дискретной случайной величины.

Биномиальное распределение

Предположим, что в одинаковых условиях производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться событие A с вероятностью p или событие $\overline{A}$ с вероятностью q ($q=1-p$).

В каждой серии из n испытаний событие A может либо не появиться, либо появиться 1, 2, …, n раз. Рассмотрим дискретную случайную величину – число появлений события A при n испытаниях. Найдем закон распределения этой случайной величины. Величина X может принимать следующие значения: $x_0=0,\ x_1=1, \dots,\ x_n=n$.

Вероятность p_k того, что величина X принимает значение x_k, вычисляется по формуле Бернулли

$$p_k=P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\dots,n.$$

Закон распределения дискретной случайной величины, определяемый формулой Бернулли, называется *биномиальным*. Постоянные n и p, входящие в формулу для вычисления вероятности, называются *параметрами биномиального распределения.*

Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде таблицы

x_i	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
p_i	q^n	$n\cdot q^{n-1}$	$\dots$	$C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению вероятности этого события в каждом испытании на число всех испытаний

$$MX = n\cdot p.$$

Дисперсия числа появлений события A при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p его появления одна и та же, равна произведению числа всех испытаний на вероятность появления и вероятность не появления данного события

$$DX = n\cdot p\cdot q.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, определяется формулой

$$\sigma_X = \sqrt{n\cdot p\cdot q}.$$

Пример 3.1. Стрелок производит 10 выстрелов по цели. За каждое попадание в цель ему начисляется три очка. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Найти математическое ожидание случайной величины – количества начисленных очков, и ее дисперсию.

Решение. Обозначим X – число попаданий при 10 выстрелах. Очевидно, что X имеет биномиальное распределение с параметрами $n=10$ и $p=0{,}6$. Тогда, количество начисленных очков будет величина $3\cdot X$.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X найдем по формуле $MX = n\cdot p = 10\cdot 0{,}6 = 6$, а математическое ожидание числа начисленных очков по свойствам математического ожидания

$$M(3X) = 3\cdot MX = 3\cdot n\cdot p = 18.$$

По формуле дисперсии биномиальной случайной величины и второму свойству дисперсии получим дисперсию случайной величины $3\cdot X$

$$D(3X) = 3^2\cdot DX = 9\cdot n\cdot p\cdot q = 21{,}6.$$

Напомним, что $q = 1-p = 1-0{,}6 = 0{,}4$ – вероятность противоположного события (в условиях задачи – это вероятность промаха при каждом выстреле).

Вероятности в данном законе распределения вычисляются по формуле Бернулли, которая содержит числа сочетаний, называемые биномиальными коэффициентами. Поэтому данный закон распределения и получил название – биномиальный.

Геометрическое распределение

Рассмотрим ситуацию с покупкой лотерейных билетов. Обозначим X число купленных билетов до появления первого выигрыша при условии, что вероятность получения выигрыша при каждой покупке билета не зависит от результатов предыдущих купленных билетов и имеет одно и то же значение p ($0 < p < 1$). Это возможно, если всего существует достаточно много билетов, или покупки билетов происходят при различных выпусках лотереи.

Величина X – дискретная случайная величина, возможными значениями которой являются натуральные числа. Найдем закон распределения вероятностей этой случайной величины.

Событие $X = 1$ означает выигрыш первого купленного билета, его вероятность равна p, т.е. $P(X = 1) = p$.

Событие $X = 2$ означает выигрыш второго билета и, значит, проигрыш первого. Применим теорему умножения вероятностей для независимых событий, получим $P(X = 2) = q \cdot p$, где $q = 1 - p$.

Событие $X = 3$ означает выигрыш третьего билета и, соответственно, проигрыш первых двух билетов. Поэтому $P(X = 3) = q \cdot q \cdot p = q^2 \cdot p$.

Продолжая аналогичные рассуждения, находим общую формулу

$$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p, \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Итак, имеем закон распределения

x_i	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
p_i	p	$q \cdot p$	$\ldots$	$q^{n-1} \cdot p$	$\ldots$

Случайная величина с таким законом распределения называется *распределенной по геометрическому закону.*

Название «геометрическое распределение» связано с тем, что ряд вероятностей представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 - p$. Сумма этого ряда равна единице

$$p + q \cdot p + \ldots + q^{n-1} \cdot p + \ldots = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1.$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, имеющей геометрическое распределение

$$MX = \frac{1}{p}, \qquad p > 0,$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Вероятность успеха p в геометрическом распределении называют параметром распределения.

Пример 3.2. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле для данного стрелка равна 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа выстрелов по цели до первого попадания.

Решение. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p=0{,}1$. Тогда, вероятность промаха для данного стрелка $q=1-p=1-0{,}1=0{,}9$. По формулам для вычисления числовых характеристик геометрической случайной величины

$$MX=\frac{1}{0{,}1}=10, \qquad DX=\frac{0{,}9}{0{,}1^2}=90.$$

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$. Константа $\lambda=n\cdot p>0$ называется параметром пуассоновского распределения. Закон распределения Пуассона можно представить в виде следующей таблицы

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda\cdot e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2\cdot e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$	…

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, одинаковы и каждая из этих числовых характеристик равна параметру λ, то есть $MX=\lambda$, $DX=\lambda$.

Первое из равенств означает, что центром распределения данной случайной величины является число λ. В этом законе вероятности вычисляются по формуле Пуассона, поэтому и закон назвали именем Пуассона. Он является предельным для биномиального закона в случае, когда число испытаний велико, а вероятность успеха в одном испытании мала.

Пример 3.3. Завод отправил на базу 5 000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Составить закон распределения числа негодных изделий, прибывших на базу и найти числовые характеристики.

Решение. Случайная величина X – число негодных изделий, имеет распределение Пуассона, так как вероятность $p=0{,}0002$ очень мала, а число изделий $n=5000$ довольно велико. Найдем параметр $\lambda=n\cdot p=5000\cdot 0{,}0002=1$.

Следовательно, $MX=DX=1$. Для удобства при решении задач составим таблицу основных видов распределений дискретной случайной величины

№	*Название закона*	*Обозначение*	$P(X=k)$	MX	DX
1.	***Биномиальный***	$X\sim B(n;\,p)$	$C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$
2.	***Пуассона***	$X\sim \Pi(\lambda)$	$\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
3.	***Геометрический***	$X\sim G(p)$	$q^{n-1}\cdot p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$

Пример 3.4. Случайная составляющая выручки равна $4 \cdot X$, где X – случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами $n = 200$ и $p = 0{,}25$. Случайная составляющая затрат имеет вид $100 \cdot Y$, где Y – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda = 4$. Найти дисперсию прибыли, считая, что случайные составляющие выручки и затрат независимы.

Решение. Обозначим случайную величину, описывающую прибыль, буквой Z. Тогда, с учетом условия задачи, $Z = 4 \cdot X - 100 \cdot Y$. Найдем дисперсию этой величины

$$DZ = D(4 \cdot X - 100 \cdot Y) = 4^2 DX + (-100)^2 DY .$$

По свойствам дисперсии для независимых случайных величин: дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий. Константа выносится в квадрате за знак дисперсии.

Так как, по условию задачи $X \sim B(n = 200;\ p = 0{,}25)$ и $X \sim \Pi(\lambda = 4)$, то

$$DX = n \cdot p \cdot q = 200 \cdot 0{,}25 \cdot (1 - 0{,}25) = 37{,}5,$$

$$DY = \lambda = 4.$$

Таким образом,

$$DZ = 16 \cdot 37{,}5 + 10000 \cdot 4 = 600 + 40000 = 40600 .$$

Основные законы распределения непрерывной случайной величины

При решении задач приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывной случайной величины. Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также *законами распределения*. В частности, по виду графика функции плотности принимают решение о виде распределения. Рассмотрим основные виды законов распределения непрерывной случайной величины, которые часто встречаются на практике.

Равномерное распределение

Распределение называется *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Приведем примеры равномерного распределения случайной величины.

Пример 3.5. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервалы движения 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус не более 3 минут.

Решение. Время ожидания можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между временем прибытия двух автобусов. Таким образом, X имеет равномерное распределение.

Найдем плотность равномерного распределения $f(x)$, считая, что все возможные значения случайной величины заключены на интервале $(a;b)$, на котором функция $f(x)$ сохраняет постоянные значения. В нашем случае $(0;10)$.

По условию X, не принимает значений вне интервала $(a;b)$, поэтому $f(x)=0$ при $X<a$ и $X>b$.

Найдем постоянную C. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)dx=1, \text{ или в нашем случае } \int_a^b Cdx=1.$$

$$\int_a^b Cdx=Cx\Big|_a^b=C\cdot(b-a)=1.$$

Отсюда, $C=\dfrac{1}{b-a}$. Итак, искомая плотности вероятности равномерного распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Следует отметить, что значение функции плотности на интервале $(a;b)$ равно числу, обратному длине интервала $(a;b)$. (Длина интервала равна длине отрезка и вычисляется как разность конца и начала интервала). Геометрически фигура под кривой распределения является прямоугольником с основанием – интервалом $(a;b)$. Это свойство можно использовать и при вычислении вероятности попадания случайной величины на заданный промежуток.

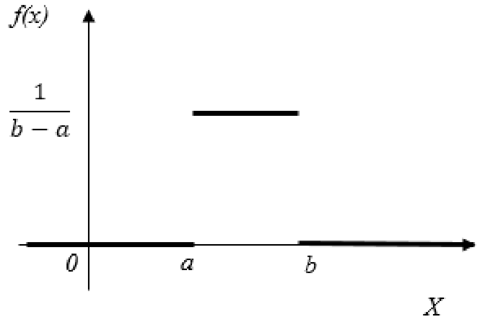


Рис. 6

В условиях нашего примера, найдем искомую вероятность по формуле $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$. $P(0<X<3)=\int_0^3 \frac{1}{10}dx=0{,}3$.

Также эту вероятность можно вычислить, используя геометрический смысл вероятности: длину нужного отрезка делим на длину всего отрезка возможных значений. В общем случае, если случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, то вероятность попадания этой случайной величины в отрезок $[\alpha;\beta]$, содержащейся внутри $[a;b]$ имеет вид

$$P(X\in[\alpha;\beta])=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Например, для случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [–5; 15] найдем вероятность $P\left(\frac{1}{X-5}>6\right)$. Для решения этого вопроса, сначала нужно решить неравенство

$$\frac{1}{X-5}>6 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{X-5}-6>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1-6X+30}{X-5}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{31-6X}{X-5}>0.$$

Далее методом интервалов находим область решений $X\in\left(5;\frac{31}{6}\right)$.

Таким образом,

$$P\left(\frac{1}{X-5}>6\right)=P\left(X\in\left(5;\frac{31}{6}\right)\right)=\frac{\frac{31}{6}-5}{15-(-5)}=\frac{\frac{1}{6}}{20}=\frac{1}{120}.$$

Найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно на интервале $(a;b)$.

$$MX=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{b+a}{2}.$$

Итак, $MX=\frac{a+b}{2}$.

Аналогично, используя свойство интегралов, найдем дисперсию

$$DX=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-(MX)^2=\frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma_X=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которая описывается функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Видно, что нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Вероятностный смысл этих параметров: a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

Этот вид распределения наиболее часто встречается на практике. Более того, нормальный закон является предельным для суммы большого количества независимых, одинаково распределенных случайных величин. Например, размерный ряд одежды или обуви в большом магазине имеют распределение, близкое к нормальному (действительно, существуют так называемые «ходовые», то есть наиболее часто встречающиеся размеры, а очень маленькие и очень большие встречаются редко). Распределение оценок на экзамене для большого количества учащихся, рост призывников, средняя заработная плата и многое другое имеют в предел нормальный закон распределения вероятностей.

Замечание 1. Общим называют нормальное распределение с произвольными параметрами a и σ $(\sigma > 0)$.

Нормированным (стандартным) называют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$. Плотность нормированного распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Эта функция называется функцией Гаусса.

Замечание 2. Функция распределения общего нормального распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Функция распределения нормированного распределения

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Функция $\Phi^*(x)$ табулирована – это функция Лапласа. Легко проверить, что $F(x) = \Phi^*\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Замечание 3. Вероятность попадания нормированной нормальной величины X в интервал $(0; x)$ можно найти, пользуясь стандартной функцией Лапласа.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Действительно,

$$P(0 < X < x) = \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

Следует отметить, что функция Лапласа является нечетной функцией, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При $x > 4$ значения функции $\Phi(x) \to 0{,}5$, а при $x < -4$ значения функции $\Phi(x) \to -0{,}5$.

Используя стандартную функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$

можно получить формулу для вычисления вероятности

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

На практике часто используется формула

$$P\{|X-a|<\varepsilon\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Частным случаем этой формулы является так называемое *правило трех сигм.* Если взять значение $\varepsilon=3\cdot\sigma$, то

$$P\{|X-a|<3\sigma\}=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot0{,}49865=0{,}9973.$$

Это правило говорит о том, что вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$ является практически достоверным событием. Правило часто используется на практике для определения интервала возможных значений случайной величины. Убедимся в нем при решении примера.

Пример 3.6. Производится закупка мужской обуви. Как необходимо заказать распределение обуви по размерам, если из статистки известно, что данное распределение является нормальным с математическим ожиданием $a=42$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=2$?

Решение. Нормальный закон распределения имеет непрерывная случайная величина, принимающая все возможные значения. Очевидно, что обувь имеет ограниченный интервал возможных значений. В частности, по правилу трех сигм, возможные значения размера мужской обуви находятся в интервале

$$(a-3\sigma;\ a+3\sigma)=(42-3\cdot2;42+3\cdot2)=(36;48).$$

Действительно, этот интервал представляет собой все возможные значения размера мужской обуви в обычном магазине. Но, как мы знаем, размерный ряд обуви представлен лишь целыми или целыми с половиной значениями. Поэтому, для того, чтобы определить, в каком количестве заказать обувь определенного размера (например, 42-го), нужно взять интервал, содержащий данное значение. В действительности, мы посчитаем вероятность того, что именно этот размер будет востребован покупателем.

Итак, если магазин предлагает не только целые размеры, но и целые с половиной, то делим интервал возможных значений на непересекающиеся промежутки, содержащие все необходимые размеры. Если нас интересует 42 размер (в еще есть 41,5 и 42,5), то рассмотрим интервал (41,75; 42,25), центром которого является нужный нам размер. По формуле вероятности попадания в интервал нормальной случайной величины

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

находим нужную вероятность

$$P(41{,}75<X<42{,}25)=\Phi\left(\frac{42{,}25-42}{2}\right)-\Phi\left(\frac{41{,}75-42}{2}\right)=$$

$$\Phi(0{,}125)-\Phi(-0{,}125)=2\cdot\Phi(0{,}125)=2\cdot0{,}05=0{,}1.$$

Таким образом, обувь 42 размера необходимо заказать примерно 10 % от всего размерного ряда. Аналогично можно найти вероятности и для остальных размеров. Эти вычисления позволяют распределить закупку определенной модели обуви по размерам таким образом, чтобы оптимально удовлетворить и потребности покупателя, и желание продавца.

Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет показательный (или экспоненциальный) закон распределения, если она принимает неотрицательные значения и ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$ – параметр распределения.

Числовые характеристики показательного закона

$$MX=\frac{1}{\lambda},\qquad DX=\frac{1}{\lambda^2},\qquad \sigma_X=\frac{1}{\lambda}.$$

Эти формулы легко проверить по определению числовых характеристик непрерывной случайной величины с помощью вычисления определенного интеграла. В частности, функция распределения показательного закона имеет вид

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=-e^{-\lambda x}+e^0=1-e^{-\lambda x}.$$

Найдем вероятность попадания случайной величины X, распределенной по показательному закону, в интервал $(a;b)$

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=$$

$$=(1-e^{-\lambda b})-(1-e^{-\lambda a})=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Пример 3.7. Случайная величина T – время работы прибора имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что прибор проработает не менее 800 часов, если среднее время работы прибора 400 часов.

Решение. Среднее время работы – это математическое ожидание случайной величины T – время работы прибора. То есть $MT=\frac{1}{\lambda}=400$. Следовательно, параметр $\lambda=\frac{1}{400}$. По формуле вычисления вероятности имеем

$$P(T\ge 800)=1-P(0<T<800)=1-\left(e^{-\frac{1}{400}\cdot 0}-e^{-\frac{1}{400}\cdot 800}\right)=$$

$$=1-(e^0-e^{-2})=1-1+e^{-2}=\frac{1}{e^2}\approx 0{,}135.$$

Следует отметить, что показательный закон наиболее часто встречается в теории массового обслуживания и теории надежности. В частности, отклик на рекламу имеет показательное распределение.

Для удобства при решении задач, составим таблицу основных видов распределений непрерывной случайной величины

Название закона	*Обозначение*	$f(x)$	MX	DX	$P(\alpha < X < \beta)$
Равномерный	$X \sim U(a;b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{\beta-\alpha}{b-a}$
Нормальный	$X \sim N(a,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$
Показательный	$X \sim E(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$

Пример 3.8. Случайная величина дохода X распределена по нормальному закону с параметрами с параметрами $a = 39$ и $\sigma^2 = 0{,}54$. Случайная величина инфляции Y равномерно распределена на отрезке [– 1; 5]. Найти математическое ожидание и дисперсию комбинации величин $2X - 6Y + 4$, считая величины X и Y независимыми.

Решение. Так как $X \sim N(a,\sigma)$, то $MX = a = 39$, $DX = \sigma^2 = 0{,}54$. $Y \sim U(-1;5)$, то $MX = \frac{-1+5}{2} = 2$, $DX = \frac{(5+1)^2}{12} = 3$.

Воспользуемся свойствами математического ожидания

$$M(2X - 6Y + 4) = 2MX - 6MY + 4 = 2 \cdot 39 - 6 \cdot 2 + 4 =$$
$$= 78 - 12 + 4 = 70.$$

По свойствам дисперсии для независимых случайных величин имеем

$$D(2X - 6Y + 4) = 2^2 \cdot DX + (-6)^2 \cdot DY + 0 = 4 \cdot 0{,}54 + 36 \cdot 3 =$$
$$= 2{,}16 + 108 = 110{,}16.$$

Тест по теме «Основные законы распределения случайных величин»

1. По какой формуле определяется математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$?

a) $MX = \frac{a+b}{2}$;

b) $MX = \frac{a+b}{12}$;

c) $MX = \frac{b-a}{2}$;

d) $MX = b - a$.

2. По какой формуле определяется дисперсия случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$?

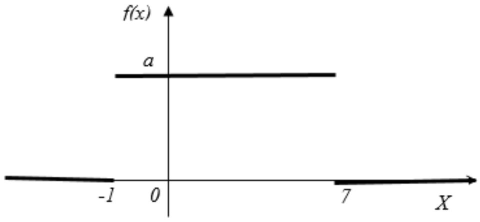
a) $DX = \frac{b-a}{2}$;

b) $DX = \frac{(b-a)^2}{2}$;

c) $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$;

d) $DX = (b-a)^2$.

3. График плотности распределения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (– 1; 7), имеет вид



Тогда значение a равно…

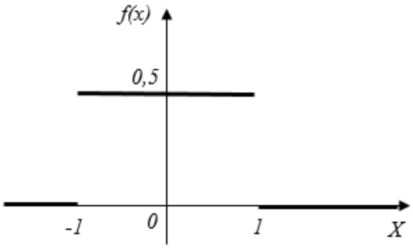
a) 1;

b) $\frac{1}{6}$;

c) $\frac{1}{7}$;

d) $\frac{1}{8}$.

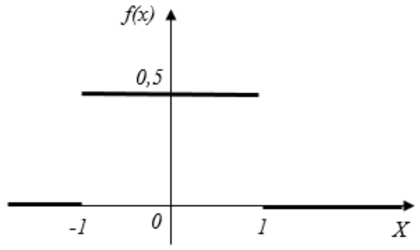
4. Если график плотности распределения $f(x)$ случайной величины X, имеет вид



то $D(6X+5) = \ldots$

a) 9;
b) 6;
c) 21;
d) 12.

5. Если график плотности распределения $f(x)$ случайной величины X, имеет вид



то $M(2X+7)=\ldots$

a) 4;
b) 5;
c) 6;
d) 8.

6. Непрерывная случайная величина X равномерно распределена на отрезке [–1; 5]. Найти DX .

a) 3;
b) 1;
c) 2;
d) 0,75.

7. Случайная величина распределена равномерно на интервале (0; 6). Тогда ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны…

a) 4 и $\frac{4}{3}$;
b) 2 и 3;
c) 3 и 3;
d) 3 и 2.

8. По какой формуле определяется плотность распределения $f(x)$ случайной величины X , распределенной по показательному закону, при $x \geq 0$?

a) $f(x)=1-\lambda e^{-\lambda x}$;
b) $f(x)=e^{-\lambda x}$;
c) $f(x)=1-e^{-\lambda x}$;
d) $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

9. По какой формуле определяется функция распределения $F(x)$ случайной величины X , распределенной по показательному закону, при $x \geq 0$?

a) $F(x)=1-\lambda e^{-\lambda x}$;
b) $F(x)=e^{-\lambda x}$;
c) $F(x)=1-e^{-\lambda x}$;
d) $F(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

10. По какой формуле определяется математическое ожидание MX случайной величины X, распределенной по показательному закону?

a) $MX = \frac{1}{\lambda^2}$;

b) $MX = \frac{1}{\lambda}$;

c) $MX = e^{-\lambda}$;

d) $MX = 1 - e^{-\lambda}$.

11. По какой формуле определяется дисперсия DX случайной величины X, распределенной по показательному закону?

a) $DX = \frac{1}{\lambda^2}$;

b) $DX = \frac{1}{\lambda}$;

c) $DX = e^{-\lambda}$;

d) $DX = 1 - e^{-\lambda}$.

12. По какой формуле определяется плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, распределенной по нормальному закону?

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$;

b) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$;

d) $f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

13. Чему равно математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}?$$

a) a;
b) e;
c) σ;
d) $\sqrt{2\pi}$.

14. Чему равна дисперсия случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$?

a) a;
b) e;
c) σ^2;
d) $\sqrt{2\pi}$.

15. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Тогда математическое ожидание этой нормально распределенной случайной величины равно …

a) 18;
b) 4;
c) 3;
d) 9.

16. Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$, то $D(2X+1)=$ …

a) 8;
b) 15;
c) 16;
d) 36.

17. Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$, то $M(4X+7)=$ …

a) 27;
b) 15;
c) 16;
d) 36.

18. Если X – нормально распределенная случайная величина, у которой $a=4$, $\sigma=3$, $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, то вероятность неравенства $1<X<13$ равна…

a) $\Phi(1)-\Phi(0,5)$;
b) $\Phi(0,5)$;
c) $\Phi(1)$;
d) $0,5\Phi(0,5)$.

19. Вероятность появления события A в 20 повторных независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,7. Тогда математическое ожидание числа появлений этого события равно…

a) 4,2;

b) 6;

c) 14;

d) 13,3.

20. Вероятность годного изделия 0,5. Чему приближенно равна вероятность того, что в партии из 400 изделий число годных лежит в пределах от 180 до 220?

a) $0{,}5(\Phi(1{,}5)+\Phi(1))$;

b) $0{,}5(\Phi(2)-\Phi(1))$;

c) $\Phi(1{,}5)$;

d) $\Phi(2)$.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Для исследования различных экономических ситуаций экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Требования к модели противоречивы. Согласно высказыванию академика Ю.И. Неймарка, «модель должна быть простой, но не проще, чем это возможно». Это означает, что с одной стороны, она должна быть достаточно полной, то есть в ней должны учитываться все важные факты, от которых существенно зависит принятие правильного решения в той или иной экономической ситуации. С другой стороны, модель должна быть достаточно простой для того, чтобы можно было увидеть связь между входящими в нее параметрами. При моделировании можно пренебрегать различными условиями, если известно, как это может отразиться на конечном результате, поскольку множество мелких и второстепенных факторов может существенно усложнять получение результата. Одним словом, искусство составлять математические модели есть именно *искусство*, и опыт в этом деле приобретается постепенно.

Важнейшим понятием при математическом моделировании является понятие *адекватности модели*, то есть соответствия модели моделируемому объекту или процессу. Это понятие является условным, так как естественно, что полного соответствия математической модели и реального экономического процесс быть не может. Поэтому для того, чтобы полученная модель, как можно ближе была приближена, к той или иной ситуации, или как можно более полно описывала то или иной объект, весь процесс моделирования можно разбить на этапы.

1. Постановка экономической проблемы. На этом этапе очень важно правильно сформулировать цель исследования, так как в зависимости от этого выбирается дальнейшее построение модели. Необходимо достаточно точно описать свойства и особенности рассматриваемой ситуации или процесса. На этом шаге идет сбор всей нужной информации для перехода к построению математической модели.

2. Построение экономической модели. Это этап формализации экономической проблемы, то есть выражение ее в виде конкретных математических зависимостей (функций, уравнений, неравенств и др.). Построение моделей в свою очередь подразделяется на несколько стадий. Определение управляющих переменных, изменяя значения, которых можно получить решение задачи, то есть достигнуть поставленной цели. На второй стадии построения модели формируется числовой критерий, который описывает основную цель, рассматриваемого экономического процесса. Его называют критерий качества управляющих переменных, или целевой функцией. В процессе моделирования, также формализуют все условия, которым должны удовлетворять эти переменные. Другими словами, строят допустимое множество.

После построения модели происходит поиск необходимого алгоритма численного решения задачи или программы на ЭВМ, которая будет использоваться для проведения расчетов. Изучение поведения модели большой размерности при различных условиях, возможно, проводить благодаря высокому быстродействию современных ЭВМ, а для многих моделей такое исследование является единственным. После получения решения построенной задачи решается важнейший вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели.

Одними из наиболее распространенных моделей являются *оптимизационные*, которые в теории рыночной экономики присутствует в основном на микроуровне (максимизация полезности потребителем или прибыли фирмой); на макроуровне результатом рационального выбора поведения экономическими субъектами оказывается некоторое состояние равновесия. Отличительными признаками оптимизационных моделей являются:

– наличие одного или нескольких критериев оптимальности (наиболее типичными критериями в экономических задачах являются: максимум дохода или прибыли, минимум издержек, минимальное время для проведения технологических операций и т.д.),

– система ограничений, которая формируется, исходя из содержательного смысла задачи, и представляет собой систему уравнений или неравенств.

Цель создания любой модели заключается в стремлении понять сложившуюся экономическую ситуацию, а также преодолеть проблемы, связанные с ее необычной сложностью. Экономические решения относятся к решениям, последствия которых мы рассматриваем в категориях прибылей и убытков. Поэтому до принятия решения приходится анализировать ситуацию, определять критерий выбора и искать оптимальные решения. Г. Вагнер перечисляет в своей работе следующие стадии анализа, которые могут считаться стандартными при проведении полного исследования экономической ситуации:

– формализация исходной проблемы;
– построение математической модели;
– математическое решение задачи;
– проверка результатов и уточнение модели;
– интерпретация полученных результатов.

С момента выделения этих стадий прошло уже много лет, но предложенная Г. Вагнером схема все еще остается актуальной. Ее наиболее существенным элементом считается решение задачи, сформулированной по результатам анализа проблемы. Важным аспектом этого этапа является анализ чувствительности полученного решения. Это подразумевает получение дополнительной информации о поведении оптимального решения при изменении некоторых параметров модели. Анализ чувствительности особенно необходим, когда невозможно оценить параметры модели. В этом случае важно изучить поведение оптимального решения в окрестности первоначальных оценок параметров модели. Чаще всего для решения оптимизационных задач необходимо применять компьютеры, поэтому огромное влияние на развитие методов решения оказывает прогресс в информатике.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются, во-первых, анализ экономических объектов и процессов; во-вторых, экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов; в-третьих, выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии. Следует, однако, иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно, как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть представлены как «консультирующие» средства. Принятие управленческих решений остается за человеком. Таким образом, экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов (пусть очень важным) в процессе планирования и управления экономическими процессами.

Рассмотрим математическую постановку общей задачи линейного программирования.

Найти максимум (или минимум) линейной функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \ (\min), \qquad (12)$$

от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих m линейным ограничениям в форме равенств или неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=, \ge)\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=, \ge)\, b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=, \ge)\, b_m. \end{cases} \qquad (13)$$

Часто в экономических задачах отдельно записываются условия неотрицательности переменных, обусловленные реальной сущностью экономических показателей

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (14)$$

Функция $f(x)$ носит название *целевой функции*. Её коэффициенты c_j образуют вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, называемый *целевым вектором*.

Любой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которого удовлетворяют условиям (13), (14), называется *допустимым планом (допустимым вектором, допустимой точкой)* задачи линейного программирования. Все они образуют множество X допустимых планов задачи.

Допустимы план $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in X$, доставляющий целевой функции $f(x)$ наибольшее (или наименьшее) значение, называется *оптимальным планом* задачи линейного программирования.

Ограничения (13) будем называть *основными ограничениями*, правая их часть – вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ – называется *вектором ограничений.* Коэффициенты левых частей основных ограничений составляют матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, которую мы будем называть *матрицей условий или технологической матрицей*.

С учетом введенных обозначений задачу (12) – (14) можно записать в компактной *векторно-матричной записи:*

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max(\min), \quad Ax \le (=,\ge) b, \quad x \ge 0,$$

где выражение $\langle c, x \rangle$ означает скалярное произведение векторов c и x, которые должны быть записаны в форме вектор-столбцов.

Для того чтобы к решению конкретной задачи можно было применять методы линейного программирования, надо построить ее математическую модель. Напомним, что построение модели включает три этапа:

1. Определение величин (переменных), которые нужно найти в задаче.
2. Определение цели решения и построение линейной целевой функции, наибольшему или наименьшему значению которой соответствует достижение цели.
3. Описание ограничений на переменные, вытекающих из условий задачи с использованием линейных равенств и (или) неравенств.

Пример 4.1. Частный инвестор намерен вложить 500 тыс. р. в различные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал три типа акций и два типа государственных облигаций. Часть денег предполагается положить на срочный вклад в банк.

Вложения	*Доход, %*	*Риск*
Акции A	15	высокий
Акции B	12	средний
Акции C	9	низкий
Долгосрочные облигации	11	–
Краткосрочные облигации	8	–
Срочный вклад	6	–

Имея в виду качественные соображения диверсификации портфеля и не формализуемые личные предпочтения, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

1) все 500 тыс. р. должны быть инвестированы;
2) по крайней мере 100 тыс. р. должны быть на срочном вкладе в банке;
3) не меньше 25 % средств, инвестированных в акции, должны быть вложены в акции с низким риском;
4) в облигации нужно инвестировать по крайней мере столько же, сколько в акции;
5) не более чем 125 тыс. р. должно быть вложено в бумаги с доходом менее 10 %.

Определить портфель бумаг инвестора, удовлетворяющий всем требованиям и максимизирующий годовой доход от вложенных денег.

Решение. Построим математическую модель задачи. Для этого надо определить переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные.

Пусть x_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$ – средства, которые планируется вложить в акции A, B, C, долгосрочные и краткосрочные облигации и срочный вклад соответственно *(тыс. р.)*. Тогда целевая функция, выражающая доход от вложенных инвестиций, строится следующим образом: если x_1 – вложенный капитал в акции A, то через год с учетом процентной ставки наращенная сумма составит $x_1 + 0{,}15x_1 = 1{,}15x_1$. Следовательно, доход от вложенных средств в акции A равен $0{,}15x_1$. Рассуждая аналогично для других вложений, суммарный доход формально можно записать так: $0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 +$ $+ 0{,}11x_4 + 0{,}08x_5 + 0{,}06x_6$. Именно его, согласно условию задачи, необходимо максимизировать. Ограничения на инвестиции согласно условию задачи и введенным обозначениям по проектам будут выглядеть следующим образом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500,$$
$$x_6 \geq 100,$$
$$0{,}25(x_1 + x_2 + x_3) \leq x_3,$$
$$x_4 + x_5 \geq x_1 + x_2 + x_3,$$
$$x_3 + x_5 \leq 125.$$

Согласно экономическому смыслу, на каждую переменную необходимо наложить условие неотрицательности: $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6$. Перенеся все переменные в левые части ограничений, после приведения подобных членов получаем полную математическую модель задачи:

$$f(x) = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 + 0{,}11x_4 + 0{,}08x_5 + 0{,}06x_6 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500,$$
$$x_6 \geq 100,$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}25x_2 - 0{,}75x_3 \leq 0,$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \geq 0,$$
$$x_3 + x_5 \leq 125,$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Пример 4.2. Издательская фирма выпускает журналы, рассчитанные на массовую аудиторию, и теперь намеревается выпускать новый красочный журнал. Для этого фирма собирается провести рекламную компанию, используя рекламные ролики на телевидении и на радио, объявления в газетах, а также прямую адресную рассылку рекламных буклетов населению. Из опыта проведения рекламных компаний своей прежней журнальной продукции руководству фирмы известно, что вложения в рекламу денежных средств в размере 1 ден. ед. приводит к увеличению прибыли от реализации печатной продукции:

- в газетах – на 0,7 ден. ед.,
- на радио – на 0,9 ден. ед.,
- посредством прямой рассылки – на 0,5 ден. ед.,
- на телевидении – на 1,2 ден. ед.

Фирма ассигнует на проведение всей рекламной компании не более 350 тыс. ден. ед. Из них на рекламу на радио, телевидение и посредством прямой рассылки фирма направляет сумму, не превышающую 60 % от вложенных средств, на рекламу посредством прямой рассылки и на телевидении – не более 35 % от вложенных средств, а на рекламу на телевидении – не более 100 тыс. ден. ед.

Определить, сколько денежных средств следует ассигновать фирме на каждый вид рекламы, чтобы прогнозируемая прибыль от рекламной компании была максимальной.

Решение. Построим математическую модель задачи. Для этого надо определить переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные.

Пусть x_j, $j = 1, 2, 3, 4$ – объемы денежных средств вкладываемых в рекламу в газетах, на радио, посредством прямой рассылки и на телевидении соответственно *(тыс. р.)*. Тогда целевая функция представляет собой суммарную прибыль, ожидаемую после проведения рекламной компании $0,7x_1 + 0,9x_2 + 0,05x_3 + 1,2x_4$. Именно ее, согласно условию задачи, необходимо максимизировать.

Ограничения устанавливают предельный объем денежных средств, которая фирма направляет:

– на всю рекламную компанию

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 350;$$

– на рекламу на радио, прямую рассылку и на телевидение

$$x_2 + x_3 + x_4 \le 0,6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

– на рекламу по прямой рассылке и на телевидение

$$x_3 + x_4 \le 0,35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

– на рекламу только на телевидении

$$x_4 \le 100.$$

К этим ограничениям необходимо еще добавить естественные условия, заключающиеся в том, что объемы средств, идущие на все виды рекламы, не могут быть отрицательными. Перенеся все переменные в левые части ограничений, после приведения подобных членов получаем полную математическую модель задачи:

$$\begin{gathered}
f(x) = 0,7x_1 + 0,9x_2 + 0,05x_3 + 1,2x_4 \to \max, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 350, \\
-0,6x_1 + 0,4x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 \le 0, \\
-0,35x_1 - 0,35x_2 + 0,65x_3 + 0,65x_4 \le 0, \\
x_4 \le 100, \\
x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{gathered}$$

Тест по теме «Линейное программирование. Моделирование в экономике»

1. На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так, что на один гоночный велосипед уходит 2 л краски, а на один дорожный 1 л краски. На заводе в наличии имеется не более 700 л краски ежедневно. Склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько нужно выпускать в день гоночных и дорожных велосипедов, для того

чтобы завод получал максимальную прибыль, если один гоночный велосипед стоит 15 долл., а дорожный 10 долл.?

Определите сколько переменных должно быть в математической модели.

a) 2;

b) 3;

c) 4.

2. На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так, что на один гоночный велосипед уходит 2 л краски, а на один дорожный 1 л краски. На заводе в наличии имеется не более 700 л краски ежедневно. Склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько нужно выпускать в день гоночных и дорожных велосипедов, для того чтобы завод получал максимальную прибыль, если один гоночный велосипед стоит 15 долл., а дорожный 10 долл.?

Определите сколько основных ограничений должно быть в математической модели.

a) 2;

b) 3;

c) 4.

3. Озеро можно заселить двумя видами рыб *A* и *B*. Средняя масса рыбы равна 2 кг для вида *A* и 1 кг для вида *B*. В озере имеется два вида пищи: *P1* и *P2*. Средние потребности одной рыбы вида *A* составляют 1 ед. корма *P1* и 3 ед. корма *P2* в день. Аналогично потребности для рыбы вида *B* составляют 2 ед. *P1* и 1 ед. *P2*. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне не более 500 ед. *P1* и не более 900 ед. *P2*. Как следует заселить озеро рыбами, чтобы максимизировать общую массу рыб?

Если в качестве переменных выбрать количество рыб *A* и *B*, которое следует заселить в озеро, то целевая функция будет иметь вид…

a) $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$;

b) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$;

c) $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$.

4. Озеро можно заселить двумя видами рыб *A* и *B*. Средняя масса рыбы равна 2 кг для вида *A* и 1 кг для вида *B*. В озере имеется два вида пищи: *P1* и *P2*. Средние потребности одной рыбы вида *A* составляют 1 ед. корма *P1* и 3 ед. корма *P2* в день. Аналогично потребности для рыбы вида *B* составляют 2 ед. *P1* и 1 ед. *P2*. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне не более 500 ед. *P1* и не более 900 ед. *P2*. Как следует заселить озеро рыбами, чтобы максимизировать общую массу рыб?

Если в качестве переменных выбрать количество рыб *A* и *B*, которое следует заселить в озеро, то основные ограничения будут иметь вид…

a) $x_1 + 2x_2 \le 500$,

$3x_1 + x_2 \le 900$;

b) $x_1 + 2x_2 = 500$,

$3x_1 + x_2 = 900$;

c) $x_1 + 3x_2 \le 500$,

$2x_1 + x_2 \le 900$.

5. Туристическая фирма в летний сезон обслуживает туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице

Показатели	*Судно*	
	«Ассоль»	*«Людмила»*
Горючее (тонн)	2	1
Экипаж (десятков)	4	3

В месяц выделяется не более 80 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 180 десятков человек.

Определите необходимое количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, чтобы обеспечить максимальный доход, если доход от эксплуатации одного судна «Ассоль» и судна «Людмила» составляет 20 и 40 ден. ед. соответственно.

Если в качестве переменных выбрать количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, то ограничение характеризующее расход горючего будет иметь вид…

a) $2x_1 + x_2 \le 80$;

b) $x_1 + x_2 \le 80$;

c) $40x_1 + 30x_2 \le 1800$.

6. Туристическая фирма в летний сезон обслуживает туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице

Показатели	*Судно*	
	«Ассоль»	*«Людмила»*
Горючее (тонн)	2	1
Экипаж (десятков)	4	3

В месяц выделяется не более 80 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 180 десятков человек.

Определите необходимое количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, чтобы обеспечить максимальный доход, если доход от эксплуатации одного судна «Ассоль» и судна «Людмила» составляет 20 и 40 ден. ед. соответственно.

Если в качестве переменных выбрать количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, то ограничение характеризующее количество экипажей будет иметь вид…

a) $40x_1 + 30x_2 \le 1800$;

b) $x_1 + x_2 \le 1800$;

c) $2x_1 + x_2 \le 80$.

7. Пусть x_1 – количество акций акционерного общества *A*, а x_2 – количество акций акционерного общества *B*. Тогда условие: количество акций общества *B* не должно превышать количество акций общества *A* более, чем на 10 шт., будет иметь вид…

a) $x_2 - x_1 \le 10$;

b) $x_1 - x_2 \le 10$;

c) $x_1 + x_2 \ge 10$.

8. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Пусть x_1 – ден. ед. вложенные в рекламу на радио, а x_2 – ден. ед. вложенные в рекламу на телевидении. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 ден. ед., а каждая минута телерекламы – в 100 ден. ед. Тогда условие, фирма хотела бы использовать радиосеть в два раза чаще, чем сеть телевидения будет иметь вид…

a) $10x_1 - x_2 = 0$;

b) $x_1 = 2x_2$;

c) $5x_1 - 2 \cdot 100x_2 = 0$.

9. Турфирма организует чартерный тур на курорт. В стоимость путевки входят стоимость авиаперелета «туда и обратно», плата за проживание в отеле, питание и экскурсии. В зависимости от предоставляемого сервиса туры подразделяются на две категории: *A* – люкс и *B* – стандарт. Цены путевок и издержки фирмы на одного клиента приведены в таблице.

Категория тура	Цена путевки, долл.	Стоимость номера в отеле, долл.	Питание и услуги, долл.
A	1 000	400	475
B	700	220	250

Фирме требуется решить, какое количество путевок каждой из категорий предложить клиентам с тем, чтобы максимизировать свою прибыль.

Пусть x_1 – количество путевок категории *A*, а x_2 – количество путевок категории *B*. Тогда целевая функция будет иметь вид…

a) $f(x) = 125x_1 + 230x_2$;

b) $f(x) = 1850x_1 + 1170x_2$;

c) $f(x) = 1000x_1 + 700x_2$.

10. На звероферме могут выращиваться песцы и черно-белые лисы. Для их питания используются два вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчете на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверька.

Вид корма	Нормы расхода кормов, кг/день		Запас корма
	Песец	Лиса	
I	5	4	84
II	3	6	72
Прибыль	7	9	

Определите, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наибольшей.

Математическая модель задачи имеет вид…

a) $f(x) = 7x_1 + 9x_2 \to \max$,

$5x_1 + 4x_2 \le 84$,

$3x_1 + 6x_2 \le 72$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$;

b) $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$,

$5x_1 + 4x_2 \le 84$,

$3x_1 + 6x_2 \le 72$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$;

c) $f(x) = 84x_1 + 72x_2 \to \max$,

$5x_1 + 3x_2 \le 7$,

$4x_1 + 6x_2 \le 9$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

Стандартная и каноническая задачи линейного программирования

В теории линейного программирования особо выделяют два вида задач – стандартную и каноническую задачи.

Стандартная задача линейного программирования.

Найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, доставляющий максимальное значение (максимум) линейной функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

и удовлетворяющий линейным ограничениям типа неравенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

и условиям неотрицательности $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0$.

В стандартной задаче соотношение между числом ограничений m и числом переменных n может быть произвольным, поскольку любому неравенству удовлетворяет бесконечное множество точек.

Векторно-матричная запись стандартной задачи линейного программирования имеет вид

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max,$$
$$Ax \le b, \qquad x \ge 0.$$

Каноническая задача линейного программирования.

Найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, максимизирующий функцию

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max,$$

и удовлетворяющий линейным ограничениям типа равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0.$$

Отметим отличительную особенность канонической задачи – наличие ограничений типа равенства (помимо условий неотрицательности).

Векторно-матричная запись канонической задачи имеет вид

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max,$$
$$Ax = b, \qquad x \ge 0.$$

Эквивалентные преобразования задач линейного программирования

Конкретная задача линейного программирования, в зависимости от экономического содержания, может иметь ограничения как типа равенств, так и неравенств любого смысла, а целевая функция может подлежать максимизации или минимизации. Покажем, что, тем не менее, любую задачу можно привести как к канонической, так и к стандартной форме с помощью эквивалентных преобразований.

Изучим, в первую очередь, взаимосвязь между стандартной и канонической задачами. Рассмотрим основные ограничения стандартной задачи

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Введем вспомогательные переменные

$$s_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Тогда предыдущие неравенства эквиваленты условиям неотрицательности $s_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m$.

Следовательно, основные ограничения стандартной задачи могут быть записаны в форме $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + s_i = b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m$, с условием неотрицательности вспомогательных переменных $s_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m$.

В результате стандартная задача с переменными $x_1, x_2, ..., x_n$ становится канонической относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n, s_1, s_2, ..., s_m$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + s_1 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + s_2 = b_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + s_m = b_m,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0,$$
$$s_1 \ge 0,\ s_2 \ge 0,\ ...,\ s_m \ge 0.$$

При этом вспомогательные переменные $s_1, s_2, ..., s_m$ называются *дополнительными*. Отметим, что они не входят в целевую функцию, т.е. $c_{n+1} = c_{n+2} = ... = c_{n+m} = 0$.

Легко сообразить, что неравенство вида $a_kx_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \ge b_k$ можно свести к равенству, вычитая из левой части неотрицательную дополнительную переменную $s_k \ge 0$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n - s_k = b_k.$$

Если расширенный вектор $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, s_1^*, s_2^*, ..., s_m^*)$ является решением полученной канонической задачи, то вектор $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – оптимальный план исходной стандартной задачи. При этом значения целевых функций совпадают.

Таким образом, при переходе от стандартной задачи линейного программирования к канонической задаче число переменных увеличивается на число основных ограничений исходной стандартной задачи.

Обратный переход от канонической задачи к стандартной очевиден, поскольку каждое основное ограничение канонической задачи

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k$$

можно представить в виде двух неравенств

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k,$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \ge b_k,$$

последнее из которых следует переписать в виде

$$-a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - ... - a_{kn}x_n \le -b_k.$$

Итак, при переходе от канонической задачи линейного программирования к стандартной число основных ограничений увеличивается в два раза.

В заключение решим вопрос о взаимосвязи между операциями на минимум и максимум. Пусть дана задача минимизации

$$f(x) \to \min, \qquad x \in X$$

с решением x^*. Это значит, что выполняется неравенство $f(x^*) \le f(x),\ x \in X$. Перепишем его в виде $-f(x^*) \ge -f(x),\ x \in X$. Полученное неравенство означает, что x^* является решением задачи

$$-f(x) \to \max, \qquad x \in X.$$

Таким образом, всякая задача на минимум сводится к задаче на максимум путем изменения знака целевой функции. Аналогично проводится переход от max к min.

Пример 5.1. Требуется привести к стандартной и канонической форме следующую задачу

$$f(x) = 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 \ge -5,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 1,$$
$$-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \le 3.$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Решение. Для приведения задачи к стандартной форме умножим целевую функцию и первые два ограничения на “–1”. Получим

$$-f(x) = -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 \to \max,$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \le 5,$$
$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 \le -1,$$
$$-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \le 3.$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Чтобы из исходной задачи получить каноническую, нужно целевую функцию умножить на “–1”, из левых частей первых двух неравенств вычесть новые неотрицательные переменные s_1, s_2, а в левую часть третьего ограничения добавить неотрицательную переменную s_3

$$-f(x) = -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 - s_1 = -5,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - s_2 = 1,$$
$$-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 + s_3 = 3.$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 5, \; s_i \ge 0, \; i = 1, 2, 3.$$

Вывод: Все типа задач линейного программирования эквиваленты между собой с точностью до рассмотренных преобразований.

Экономическая интерпретация стандартной и канонической задач линейного программирования

Предположим, что некоторое предприятие производит n различных типов товаров (продуктов) $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Для организации производственного процесса предприятие имеет m видов ресурсов $R_1, R_2, \ldots, R_m$ в количестве $b_1, b_2, \ldots, b_m$ соответственно.

Введем следующие характеристики затрат и прибыли: a_{ij} – количество ресурса R_i, необходимое для производства единицы продукта P_j (норма расхода ресурса на единицу продукции), c_j – прибыль от реализации единицы продукта P_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

В этих условиях необходимо составить план производства (план выпуска товаров) на определенный период так, чтобы обеспечить получение максимальной прибыли при соблюдении ограничений на количество ресурсов.

Построим математическую модель, отражающую эти цели.

Введем переменные x_j – количество продукта P_j, которое планируется к выпуску, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда план производства может быть описан вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, компоненты которого указывают планируемый выпуск каждого продукта.

В этих обозначениях затраты ресурса R_i на реализацию плана $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражаются суммой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Требование уложиться в лимит ресурсов приводит к неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{15}$$

Кроме того, по смыслу переменных x_j должны выполняться условия неотрицательности

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Прибыль от реализации x определяется суммой

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j. \tag{17}$$

В результате приходим к математической формулировке задачи оптимального планирования: среди всех векторов-планов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих системе (15), (16), найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ (оптимальный план производства), на котором функция (17) принимает максимальное значение.

Соотношения (15)–(17) составляют математическую модель экономической задачи планирования производства.

Отметим, что задача оптимального планирования производства является стандартной задачей линейного программирования.

Приведем теперь эту задачу к канонической форме, добавив в правую часть каждого i-го неравенства неотрицательную переменную s_i, $i = 1, 2, \ldots, m$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + s_i = b_i.$$

Выражая отсюда s_i, видим, что она равна разности между запасом соответствующего ресурса и его расходом. Следовательно, дополнительная переменная s_i может быть интерпретирована как величина остатка ресурса R_i после реализации производственной программы.

Таким образом, мы осуществили переход от стандартной задачи к канонической, которая в данном случае является более информативной. В этой связи становится понятным, что необходимо уметь решать как стандартную задачу, представляющую самостоятельный интерес, так и каноническую.

Тест по теме «Преобразование задач линейного программирования»

1. Допустимым планом задачи является…

a) вектор, удовлетворяющий всем ограничениям задачи;

b) вектор, удовлетворяющий некоторым ограничениям задачи;

c) вектор, удовлетворяющий основным ограничениям задачи.

2. Допустимым планом задачи линейного программирования

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$4x_1 + x_2 \le 20,$$
$$x_2 - x_1 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \text{ является…}$$

a) (2; 12);

b) (0; 20);

c) (–10; 0).

3. Какой знак используется в основных ограничениях в стандартной задаче линейного программирования…

a) $\le$;

b) $\ge$;

c) $=$.

4. Какой вид имеют основные ограничения в канонической задаче линейного программирования…

a) $2x_1 - 4x_2 = 8$,

$x_1 - 3x_2 = 15$;

b) $2x_1 - 4x_2 \le 8$,

$x_1 - 3x_2 \le 15$;

c) $2x_1 - 4x_2 \le 8$,

$x_1 - 3x_2 \ge 15$.

5. Задача

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$2x_1 - x_2 \le 8,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

записана в …

a) стандартной постановке;

b) канонической остановке;

c) общей постановке.

6. При переходе от стандартной задачи линейного программирования к канонической, количество переменных…

a) увеличивается на число основных ограничений стандартной задачи;

b) увеличивается в два раза;

c) не изменится.

7. При переходе от канонической задачи линейного программирования к стандартной, число основных ограничений…

a) увеличивается в два раза;

b) увеличивается на число переменных стандартной задачи;

c) не изменится.

8. Сколько переменных надо добавить при сведении задачи линейного программирования к каноническому виду

$$f(x) = -2x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 = 5,$$
$$2x_1 - x_2 \le 3,$$
$$x_1 - 3x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

a) 2;

b) 1;

c) 3.

9. При сведении общей задачи линейного программирования

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_1 - 3x_2 \le -4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

к стандартной, получим…

a) $$\begin{gathered} f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 3x_2 \le -4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0; \end{gathered}$$

b) $$\begin{gathered} f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le -4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0; \end{gathered}$$

c) $$\begin{gathered} f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + S_1 = -4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad S_1 \ge 0. \end{gathered}$$

10. Оптимальным решением задачи на максимум называется…

a) допустимый план, доставляющий максимальное значение целевой функции;

b) вектор, удовлетворяющий всем ограничениям задачи;
c) вектор, доставляющий максимальное значение функции.

Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\le b_m, \end{aligned} \tag{19}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{20}$$

Охарактеризуем допустимое множество на плоскости с координатными осями x_1 и x_2. Каждое из неравенств (19), (20) определяет полуплоскость, границей которой является либо прямая

$$p_i = \{x = (x_1, x_2): \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\}, \quad i = 1, ..., m,$$

либо координатная ось $x_j = 0, \quad j = 1, 2$.

Множество допустимых планов задачи (18), (19), (20) представляет собой, таким образом, пересечение конечного числа $(m+2)$ полуплоскостей. Такое множество называют *выпуклым многоугольным множеством*. Если оно ограничено, то получаем *выпуклый многоугольник*. При этом выпуклость понимается в том смысле, что множество располагается по одну сторону от каждой прямой, его образующей.

Точки пересечения прямых, образующих границу допустимого множества, называют *угловыми точками* или вершинами множества.

Изучим поведение целевой функции в задаче (18), (19), (20).

Линией уровня функции $f(x)$ называется множество точек x, в которых она сохраняет какое-либо постоянное значение $f(x) = h$, где h – некоторое число.

Для линейной функции (18) линиями уровня являются прямые $p(h) = \{x: c_1x_1 + c_2x_2 = h\}$, перпендикулярные вектору $c = (c_1, c_2)$.

Отметим одно свойство линейной функции $f(x) = <c, x>$ по части возрастания: при перемещении (движении) из любой точки x в направлении вектора c функция $f(x) = <c, x>$ возрастает (вектор c задает направление возрастания функции $f(x) = <c, x>$ в любой точке x). Аналогично, вектор $(-c)$ задает направление убывания функции $f(x) = <c, x>$ в любой точке x.

Таким образом: *при увеличении параметра h линии уровня функции $f(x)$ сдвигаются в направлении вектора c.*

Следовательно, если ищется максимальное значение задачи, то необходимо сдвигать линии уровня целевой функции в направлении целевого вектора до пересечения с крайней угловой точкой допустимого множества, после которой линии уровня выйдут за пределы множества допустимых точек. В этой точки и будет достигаться максимальное значение целевой функции.

Аналогичные рассуждения позволяют найти минимальное значение целевой функции, при движении линий уровня в противоположном направлении целевого вектора.

Замечание. Из геометрических соображений понятно, что решение задачи линейного программирования является граничной точкой допустимого множества. Более того, когда задача имеет решение, то существует угловая точка множества, которая является оптимальной.

Графический метод часто используется при решении задач, в которых только две неизвестных величины. Разберем его на следующем примере.

Пример 6.1. Небольшая фабрика изготовляет два вида красок: для внутренних (I) и наружных (II) работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используется два исходных продукта – A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 т, соответственно. На 1 т краски I расходуется 2 т продукта A и 1 т продукта B. На одну тонну краски II расходуется 1 т продукта A и 2 т продукта B.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску II более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 2 тыс. долл. для краски I и 3 тыс. долл. для краски II.

Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Построим математическую модель задачи. Для этого надо определить переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные.

Обозначим через x_1 и x_2 – планируемые объемы выпуска краски I и II вида соответственно. Целевая функция $f(x)$ будет выражать суммарный доход от реализации продукции, равный $2x_1 + 3x_2$ (тыс. долл.). Этот доход подлежит максимизации

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

Построим ограничения задачи, связанные с ограниченными запасами продуктов A и B. На производство краски I в количестве x_1 будет использовано $2x_1$ продукта A, а на производство краски II в объеме x_2 будет затрачено $1x_2$ того же продукта. Поскольку запас продукта A равен 6 т, то расход этого продукта на изготовление краски двух видов не может превышать этой величины: $2x_1 + x_2 \le 6$. Аналогично получим ограничение, связанное с запасом продукта B: $x_1 + 2x_2 \le 8$. Так как суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску II более, чем на 1 т, то получим следующее условие: $x_1 - x_2 \le 1$. Кроме того, условие о том, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки формирует еще одно неравенство: $x_1 \le 2$. Учитывая естественные условия неотрицательности объемов выпуска продукции, окончательно получим следующую задачу линейного программирования

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решим задачу графически, для этого построим множество допустимых планов. Рассмотрим первое неравенство. Оно задает некоторую полуплоскость, расположенную по одну сторону от граничной прямой

$$p_1: \quad 2x_1 + x_2 = 6.$$

Построим эту прямую на плоскости с координатными осями x_1 и x_2. Для проведения прямой достаточно знать две ее точки. Проще всего найти точки пересечения прямой с осями координат. Полагая $x_1 = 0$, из уравнения прямой получим $x_2 = 6$, а при $x_2 = 0$ найдем $x_1 = 3$. Таким образом, прямая p_1 пройдет через точки (0, 6) и (3, 0). Чтобы определить, по какую сторону от прямой расположена искомая полуплоскость, достаточно подставить в неравенство $2x_1 + x_2 \le 6$ координаты любой точки плоскости. Если прямая не проходит через начало координат, то удобнее всего взять точку (0,0). Очевидно, что в этой точке неравенство строго выполняется ($2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 < 6$), значит, полуплоскость, определяемая этим неравенством, лежит ниже p_1, включая в себя начало координат. Искомую полуплоскость отметим стрелкой.

Построим полуплоскость, задаваемую неравенством $x_1 + 2x_2 \le 8$. Для этого нанесем на координатную плоскость граничную прямую

$$p_2: \quad x_1 + 2x_2 = 8,$$

найдя ее точки пересечения с осями координат: (0, 4), (8, 0).

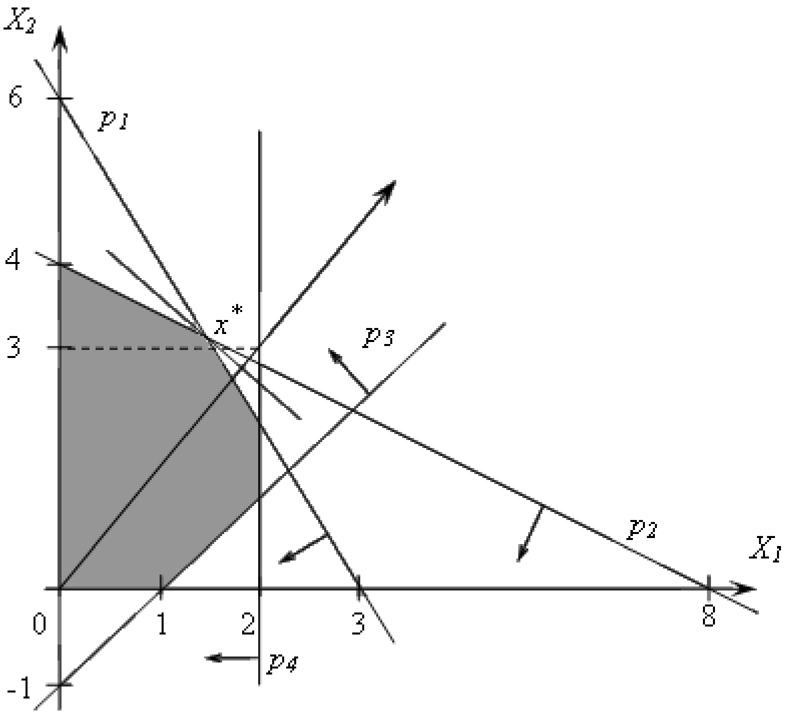
Подставляя координаты точки (0,0) в неравенство $x_1 + 2x_2 \le 8$ видим, что начало координат лежит в искомой полуплоскости ($1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 8$), значит все точки, удовлетворяющие неравенству, расположены ниже прямой p_2. Отметим эту область стрелкой. Аналогично построим полуплоскости задаваемые неравенствами $x_1 - x_2 \le 1$ и $x_1 \le 2$, обозначив их границы через p_3 и p_4 соответственно.

Наконец, условия неотрицательности: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ задают все точки первой четверти.

Выделяя теперь все точки плоскости, удовлетворяющие всем ограничениям задачи, то есть расположенные одновременно во всех полуплоскостях, получаем множество допустимых планов X.

Построим линии уровня целевой функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2$ в нашей задаче. Их уравнения будут иметь вид $2x_1 + 3x_2 = h$. Они задают семейство параллельных прямых, зависящих от параметра h. Все прямые перпендикулярны целевому вектору $c=(2,3)$, составленному из коэффициентов целевой функции, поэтому для построения семейства линий уровня целевой функции достаточно построить ее целевой вектор, и провести несколько прямых, перпендикулярных этому вектору. Линии уровня будем проводить на множестве планов X, помня при этом, что при параллельном перемещении прямых в направлении целевого вектора $c=(2,3)$ значение функции $f(x)=2x_1+3x_2$ будет возрастать.

Поскольку в задаче оптимальный план должен доставлять целевой функции максимально возможное значение, то для решения задачи графически надо среди всех точек $x=(x_1,x_2)$ множества планов X найти такую точку $x^*=(x_1^*,x_2^*)$, через которую пройдет последняя линия уровня в направлении целевого вектора $c=(2,3)$.



Из рисунка видно, что искомой точкой будет точка, лежащая на пересечении прямой p_1 и p_2. Найдем ее координаты из решения системы

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=6 \\ x_1+2x_2=8 \end{cases}.$$

Таким образом, оптимальный план задачи имеет вид $x^*=(4/3,\,10/3)$. При этом максимальное значение целевой функции будет равно $f(x^*)=38/3$. Таким образом, фабрика должна выпускать $4/3$ тонны краски для внутренних работ (I) и $10/3$ тонны краски для наружных работ (II), получая при этом доход $38/3$ тыс. долларов.

Тест по теме «Графический метод решения задач линейного программирования»

1. В задаче линейного программирования

$$f(x) = 12x_1 + 10x_2 \to \min,$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 480,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 360,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

какая из точек не является допустимой?

a) (70; 70);
b) (0; 100);
c) (100; 10).

2. Сколько угловых точек допустимого множества в задаче

$$f(x) = x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 \le 20,$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

a) 3;
b) 2;
c) 4.

3. Задачу линейного программирования можно решить графически…

a) если она имеет не более двух переменных;
b) если она имеет не более двух ограничений неравенств;
c) всегда.

4. Каков оптимальный план, если при решении задачи линейного программирования на максимум линия уровня при движении в направлении целевого вектора выходит из множества допустимых планов в точке пересечения прямых

$$3x_1 + x_2 = 6,$$
$$-2x_1 + x_2 = 1.$$

a) (1; 3);
b) (1; 2);
c) (3; 1).

5. Для изготовления изделий *A* и *B* склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на одно изделие *A* расходуется 2 кг, а на одно изделие *B* расходуется 1 кг металла. Укажите план производства, при котором обеспечен наибольший доход, если изделий *A* требуется изготовить не более 30 шт., а изделий *B* – не более 40 шт., причем одно изделие *A* стоит 5 ден. ед., а одно изделие *B* стоит 3 ден. ед.

a) $x_A = 20, \quad x_B = 40$;
b) $x_A = 30, \quad x_B = 20$;
c) $x_A = 30, \quad x_B = 40$.

6. Множество допустимых планов в задаче линейного программирования имеет следующие вершины (48; 84), (0; 120), (0; 0), (90; 0). Чему равно максимальное значение целевой функции $f(x) = 4x_1 + 10x_2$?

a) 1 200;

b) 1 032;

c) 1 600.

7. Целевой вектор указывает…

a) направление возрастания целевой функции;

b) направление убывание целевой функции;

c) в задаче на максимум – направление возрастание, в задаче на минимум – направление убывания целевой функции.

8. Максимальное значение функции $f(x) = 2x_1 - x_2$ на множестве

$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

достигается в точке…

a) (3; 0);

b) (10; 0);

c) (0; 3).

9. Минимальное значение функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2$ на множестве

$$2x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 2$$

равно…

a) 6;

b) 0;

c) 9.

10. Максимальное значение функции $f(x) = x_1 + 3x_2$ на множестве

$$x_1 + x_2 \le 9,$$
$$x_1 \le 3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

равно…

a) 27;

b) 36;

c) 21.

Двойственные задачи линейного программирования

С каждой задачей линейного программирования можно связать по определенному правилу другую задачу линейного программирования, которая называется двойственной. При этом исходную задачу называют прямой. Рассмотрение двойственной пары задач линейного программирования дает полезную дополнительную информацию о свойствах оптимального плана. Опишем способ построения двойственных задач и основные результаты теории двойственности.

Рассмотрим пример, показывающий, как в реальной ситуации могут возникать двойственные задачи линейного программирования.

Пример 7.1. На кондитерской фабрике г. Покрова перед Новым годом возник вопрос: как поступить с остатками конфет после того, как были сформированы новогодние подарки? Существует две возможности: наладить из оставшихся конфет производство небольших новогодних подарков или продать их на другую кондитерскую фабрику?

Возможные варианты небольших подарочных наборов, их стоимость и товарные запасы представлены в таблице

Наименование конфет	***Вес конфет в наборе, кг***			***Запас конфет, кг***
	набор 1	***набор 2***	***набор 3***	
«Сникерс»	0,3	0,2	0,4	600
«Марс»	0,2	0,3	0,2	700
«Баунти»	0,2	0,1	0,1	500
Цена, р.	72	62	76	

Решение. При исследовании первой возможности (наладить выпуск небольших подарочных наборов конфет) возникает вопрос об оптимальном плане выпуска наборов. Поэтому введем следующие переменные для построения математической модели:

x_1 – количество подарочных наборов 1, планируемых к производству;

x_2 – количество подарочных наборов 2, планируемых к производству;

x_3 – количество подарочных наборов 3, планируемых к производству.

Целевая функция задачи представляет собой суммарный доход от реализации всех новогодних наборов. Доход от реализации одного набора первого вида составляет 72 р., если наборов этого вида будет составлено x_1 шт., то доход от реализации этого количества наборов будет равен произведению $72x_1$ р. Аналогично, доход от реализации наборов второго и третьего вида, выпущенных в количестве x_2 и x_3 шт., составит $62x_2$ и $76x_3$ р.

Тогда суммарный доход от реализации выпущенных в продажу наборов будет равен сумме $72x_1 + 62x_2 + 76x_3$ р. В интересах кондитерской фабрики суммарный доход необходимо максимизировать. Следовательно, целевая функция в задаче примет вид

$$f(x) = 72x_1 + 62x_2 + 76x_3 \to \max.$$

Конечные запасы каждого вида конфет ограничивают их расход при производстве всех видов наборов. Выразим расход каждого вида конфет через переменные задачи. Начнем с первого вида конфет – «Сникерс».

На составление одного набора первого вида идет 0,3 кг конфет «Сникерс». Если наборов первого вида поступит в продажу x_1 шт., то на это количество набор будет использовано $0,3x_1$ кг конфет «Сникерс». Аналогично, если наборов второго и третьего вида будут выпущены в количестве x_2 и x_3 шт., то на их выпуск конфет «Сникерс» будет использовано $0,2x_2$ и $0,4x_3$ кг. Суммарный расход «Сникерса» на выпуск всех подарочных наборов в количестве x_1, x_2 и x_3 шт. составит $0,3x_1+0,2x_2+0,4x_3$ кг, и это количество не должно превышать запаса этих конфет равного 600 кг. Поэтому первое ограничение на расход «Сникерса» запишется в виде

$$0,3x_1+0,2x_2+0,4x_3 \le 600.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим ограничениям на расход конфет при производстве подарочных наборов

- конфеты «Марс»

$$0,2x_1+0,3x_2+0,2x_3 \le 700,$$

- конфеты «Баунти»

$$0,2x_1+0,1x_2+0,1x_3 \le 500.$$

И наконец, объемы производства подарочных наборов не могут быть отрицательными, хотя и могут быть равными нулю. Это условие добавляет следующие ограничения на объемы выпуска наборов

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Таким образом, оптимизационная математическая модель, описывающая производство подарочных наборов при условии выполнения ограничений на расход конфет имеет вид

$$\begin{gathered} f(x)=72x_1+62x_2+76x_3 \to \max, \qquad (21)\\ 0,3x_1+0,2x_2+0,4x_3 \le 600,\\ 0,2x_1+0,3x_2+0,2x_3 \le 700,\\ 0,2x_1+0,1x_2+0,1x_3 \le 500,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

Исследуем теперь вторую возможность (продать конфеты другой кондитерской фабрике). Здесь возникает вопрос, по каким ценам продавать конфеты?

Обозначим стоимость одного килограмма:

y_1 – стоимость одного килограмма конфет «Сникерс»;

y_2 – стоимость одного килограмма конфет «Марс»;

y_3 – стоимость одного килограмма конфет «Баунти».

Целевая функция задачи будет отражать интересы покупателя. Для него единственное пожелание заключается в сокращении до минимума расходов на покупку конфет. Поскольку один килограмм конфет «Сникерс» стоит y_1 р., то стоимость всех конфет «Сникерс», которые имеются в запасе, составит $600y_1$ р. Аналогично, стоимость конфет «Марс» и «Баунти», которые имеются в запасе 700 и 500 кг, составит $700y_2$ и $500y_3$ р. соответственно.

Тогда суммарная стоимость всех конфет, которые подлежат реализации, составит $600y_1+700y_2+500y_3$ р.

Следовательно, описывая интересы покупателя, получим следующую целевую функцию $g(y)=600y_1+700y_2+500y_3 \to \min$.

Рассчитаем, во сколько обходится кондитерской фабрике составление одного набора первого вида.

На составление одного набора первого вида идет 0,3 кг конфет «Сникерс». Стоимость одного килограмма этих конфет составляет y_1 р., тогда стоимость конфет «Сникерс», входящих в один набор первого вида составит $0,3y_1$ р. Следовательно, если стоимость конфет «Марс» и «Баунти» составляет y_2 и y_3 р., то стоимость этих конфет, входящих в один набор первого вида, составит $0,2y_2$ и $0,2y_3$ соответственно. Таким образом, один набор первого вида обходится кондитерской фабрике в $0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,2y_3$ р.

Аналогичные рассуждения приводят к следующим условиям

- стоимость одного набора второго вида

$$0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,1y_3,$$

- стоимость одного набора третьего вида

$$0,4y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3.$$

Справедливое требование кондитерской фабрики к ценам на конфеты состоит в следующем: если взять конфеты, идущие на изготовление каждого новогоднего набора, то выручка от их продажи должна быть не меньше, чем доход от реализации готовых наборов (в противном случае нет смысла продавать конфеты – лучше изготовить из них наборы и получить доход от их реализации). Это требование приводит к ограничениям

$$0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,2y_3 \ge 72,$$
$$0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,1y_3 \ge 62,$$
$$0,4y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3 \ge 76.$$

Поскольку y_1, y_2 и y_3 – это стоимость одного килограмма конфет каждого вида, то исходя из содержательного смысл переменных получаем условие

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Следовательно, получаем задачу

$$g(y) = 600y_1 + 700y_2 + 500y_3 \to \min, \qquad (22)$$
$$0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,2y_3 \ge 72,$$
$$0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,1y_3 \ge 62,$$
$$0,4y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3 \ge 76,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Задачи (21) и (22) называются двойственными задачами линейного программирования. Запишем задачи (21) и (22) в общей постановке, для этого вернемся к задаче оптимального планирования производства

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m,$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Напомним содержательный смысл параметров и переменных задачи: b_i – общее количество ресурса R_i, a_{ij} – количество ресурса R_i, которое используется для производства единицы продукции P_j, x_j – количество продукции P_j, планируемое к выпуску.

Прямая задача: найти план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль при заданных ограничениях на расход ресурсов.

Для формулировки двойственной задачи будем учитывать ценность ресурсов. Предположим, что в рамках некоторого объединения одно предприятие реализует ресурсы другому предприятию. Первое предприятие оценивает свои ресурсы с точки зрения возможной прибыли от производимой продукции и условием продажи считает оценку ресурсов не меньшую, чем прибыль от готовой продукции. Второе предприятие имеет цель минимизировать стоимость приобретаемых ресурсов.

В этой связи возникает ***двойственная задача***: установить такие цены на ресурсы (внутри объединения), чтобы минимизировать их общую стоимость (интерес покупателя) при условии, чтобы стоимость расхода ресурсов на единицу продукции была не ниже соответствующей прибыли от реализации (интерес продавца).

Проведем формализацию этой задачи. Пусть $y_i \geq 0$ – планируемая цена (оценка) ресурса R_i, $i = 1, ..., m$. Тогда общая стоимость ресурсов выражается величиной $b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$. Стоимость ресурсов, необходимых для производства единицы продукции P_j, равна $a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + ... + a_{mj} y_m$. С учетом заявленных требований приходим к следующей задаче линейного программирования относительно переменных $y_1, y_2, ..., y_m$

$$
\begin{gathered}
g(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min, \\
a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1, \\
a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n, \\
y_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., m.
\end{gathered}
$$

Это двойственная задача по отношению к прямой задаче. По существу, она является стандартной задачей линейного программирования. Выписывая матрицы условий для прямой и двойственной задачи

$$
A_{пр} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_{дв} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

видим, что $A_{дв} = A_{пр}^T$ (значок T означает операцию транспонирования матрицы).

Следовательно, пара двойственных задач может быть записана в векторно-матричной форме:

Прямая задача	Двойственная задача
$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max,$	$g(y) = \langle b, y \rangle \to \min,$
$Ax \le b, \qquad x \ge 0.$	$A^T y \ge c, \qquad y \ge 0.$

В целом двойственная задача по отношению к исходной задаче (прямой) строится согласно следующим правилам.

1. Число переменных в двойственной задаче равно числу основных ограничений в прямой задаче, и наоборот.
2. Матрица условий двойственной задачи получается из матрицы условий прямой задачи путем транспонирования.
3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.
4. Вектор ограничений двойственной задачи является целевым вектором прямой задачи.
5. Целевым вектором двойственной задачи является вектор ограничений прямой задачи.
6. Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи стремится к максимуму.

Пример 7.2. Рассмотрим стандартную задачу с двумя переменными, тремя ограничениями в форме неравенств и условиями неотрицательности.

$$f(x) = 2x_1 - 4x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 8,$$
$$-3x_1 + x_2 \le -7,$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Построим к ней двойственную задачу, руководствуясь правилами 1 – 6. Она будет иметь три переменных и два ограничения.

$$g(y) = 8y_1 - 7y_2 + 10y_3 \to \min,$$
$$y_1 - 3y_2 + 2y_3 \ge 2,$$
$$3y_1 + y_2 - 5y_3 \ge -4,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Двойственные задачи (21) и (22) образуют симметричную двойственную пару.

Связь между планами двойственных задач

Рассмотрим симметричную пару двойственных задач:

Прямая задача	Двойственная задача
$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max,$	$g(y) = \langle b, y \rangle \to \min,$
$Ax \le b, \qquad x \ge 0.$	$A^T y \ge c, \qquad y \ge 0.$

Установим простейшие свойства двойственной пары.

Свойство 1. Основное неравенство теории двойственности. Для любых допустимых планов x (прямой задачи) и y (двойственной задачи) выполняется неравенство

$$<c, x> \le <b, y>.$$

Из этого свойства вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Если целевая функция прямой задачи не ограничена сверху, то множество допустимых планов двойственной задачи пусто.

Следствие 2. Если целевая функция двойственной задачи не ограничена снизу, то множество допустимых планов прямой задачи пусто.

Таким образом, либо обе задачи имеют решение, либо обе не разрешимы.

Свойство 2. Пусть $\bar{x}$ – допустимый план прямой задачи, $\bar{y}$ – допустимый план двойственной задачи, причем $<c, \bar{x}> = <b, \bar{y}>$. Тогда $\bar{x}$ – решение прямой задачи, $\bar{y}$ – решение двойственной задачи.

Отметим, что это свойство формулирует достаточное условие оптимальности в двойственной паре задач.

Первая теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем значения целевых функций на этих планах равны

$$f(x^*) = g(y^*) \quad \text{или} \quad <c, x^*> = <b, y^*>.$$

Экономический смысл первой теоремы двойственности состоит в том, что при оптимальной организации выпуска продукции и оптимальных ценах на потребляемые ресурсы оба способа их использования (выпуск продукции или продажа ресурсов) равноценны. Однако при неоптимальном плане производства продукции всегда прибыль от ее реализации будет меньше стоимости используемых ресурсов, что следует из основного неравенства теории двойственности.

Первая теорема двойственности позволяет проверить на оптимальность некоторый допустимый план прямой задачи, если удастся решить двойственную задачу.

Вторая теорема двойственности. Допустимые планы $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – оптимальны (каждый в своей задаче), тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$<Ax^* - b, y^*> = 0 \tag{23}$$

$$<A^T y^* - c, x^*> = 0 \tag{24}$$

Условия (23), (24) называются условиями равновесия. Рассмотрим их содержательный смысл для симметричной пары двойственных задач. Раскрывая скалярные произведения, распишем условия (23) и (24) более подробно

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^* - b_i) \cdot y_i^* = 0, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{1j}y_1^* + ... + a_{mj}y_m^* - c_j) \cdot x_j^* = 0. \tag{26}$$

В сумме (25) каждое слагаемое есть произведение разности левой и правой частей ограничения прямой задачи на соответствующую двойственную переменную. Очевидно, что все слагаемые имеют один и тот же знак (≤ 0), так как разности в круглых скобках меньше или равны нулю, а $y_i^* \ge 0$. Отсюда следует, что сумма (25) равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в ней равно нулю.

$$(a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^* - b_i) \cdot y_i^* = 0, \quad i = 1, ..., m. \qquad (27)$$

В сумме (26) каждое слагаемое равно произведению разности левой и правой частей ограничения двойственной задачи на соответствующую переменную прямой задачи. Все слагаемые в этой сумме одного знака (≥ 0), так как разности в круглых скобках и переменные x_j^* неотрицательны. Для того, чтобы сумма равнялась нулю, любое слагаемое в сумме должно быть равно нулю.

$$(a_{1j}y_1^* + ... + a_{mj}y_m^* - c_j) \cdot x_j^* = 0, \quad j = 1, ..., n. \qquad (28)$$

Учитывая знаки сомножителей в произведении (27), из него можно получить пару условий

$$\textit{если } a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^* < b_i, \textit{ то } y_i^* = 0. \qquad (27a)$$

$$\textit{если } y_i^* > 0, \textit{ то } a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i. \qquad (27b)$$

Аналогично, из (8) следует пара условий

$$\textit{если } a_{1j}y_1^* + ... + a_{mj}y_m^* > c_j, \textit{ то } x_j^* = 0. \qquad (28a)$$

$$\textit{если } x_j^* > 0, \textit{ то } a_{1j}y_1^* + ... + a_{mj}y_m^* = c_j. \qquad (28b)$$

Таким образом, для пары двойственных задач:

– если какое-либо ограничение одной задачи на оптимальном плане выполняется как строгое неравенство, то соответствующая координата оптимального плана другой задачи равна нулю (условия (27a) и (28a)),

– если какая-либо координата оптимального плана одной задачи положительна, то соответствующее ограничение другой задачи обращается в равенство (условия (27b) и (28b)).

Дадим экономическую интерпретацию этим условиям в рамках задачи оптимального планирования производства. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – оптимальный план выпуска, $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – оптимальный вектор двойственных оценок ресурсов.

Двойственные оценки различных видов ресурсов не всегда можно отождествлять с действительными ценами, по которым осуществляется их закупка. Чаще всего речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность ресурса относительно увеличения прибыли, только относительно полученного оптимального плана. Нулевые двойственные оценки свидетельствуют о не дефицитности соответствующего ресурса.

Ресурс R_i будем называть *дефицитным* на плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если на этом плане он расходуется полностью

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + ... + a_{in}\bar{x}_n = b_i.$$

Ресурс R_i называется *недефицитным* на плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если на этом плане он расходуется не полностью

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + ... + a_{in}\bar{x}_n < b_i.$$

Продукт P_j называется *рентабельным* при плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если согласно этому плану он производится.

Продукт P_j называется *нерентабельным* при плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если согласно этому плану он не выпускается.

Тогда условия равновесия допускают следующее толкование:

– если ресурс R_i не дефицитен, то его двойственная оценка равна нулю;

– если ресурс R_i имеет положительную двойственную оценку, то он является дефицитным;

– если стоимость расхода ресурсов на единицу продукта P_j больше соответствующей прибыли от реализации, то продукт P_j при оптимальном плане планирования производства является не рентабельным;

– если продукт P_j является рентабельным по оптимальному плану производства, то стоимость расхода ресурсов на его производство совпадает с прибылью от его реализации.

Условия равновесия позволяют находить решение одной из пары двойственных задач линейного программирования по известному оптимальному плану другой задачи.

Пример 7.3. Процесс изготовления трех видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на двух станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограниченно 30 и 70 часами в неделю. Время обработки одного изделия каждого вида приведены в таблице

Станки	***Время обработки одного изделия, ч***		
	Изделие 1	***Изделие 2***	***Изделие 3***
1	1	1	1
2	1	2	0

Требуется найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида, если цена первого изделия – *\$600*, второго изделия – *\$800*, третьего изделия – *\$100*.

Решение. Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 – количество изделий первого, второго и третьего вида, планируемое к производству. Тогда математическая модель задачи будет иметь вид

$$f(x) = 600x_1 + 800x_2 + 100x_3 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 30,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 70,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Двойственная задача будет иметь вид

$$g(y) = 30y_1 + 70y_2 \to \min ,$$
$$y_1 + y_2 \ge 600,$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 800,$$
$$y_1 \ge 100,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Решим ее геометрически. Построим граничные прямые:

(p_1) $y_1 + y_2 = 600$ проходит через точки (0, 600), (600, 0);

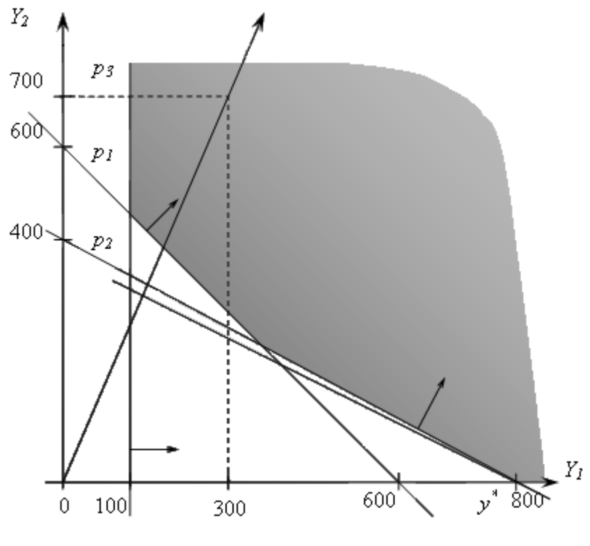
(p_2) $y_1 + 2y_2 = 800$ проходит через точки (0, 400), (800, 0);

(p_3) $y_1 = 100$ проходит через точку (100, 0), параллельно оси y_2;

и целевой вектор $c = (30, 70)$.

Подставляя координаты точки (0,0) в неравенство $y_1 + y_2 \ge 600$ видим, что начало координат не лежит в искомой полуплоскости ($0 + 0 < 600$), значит все точки, удовлетворяющие неравенству, расположены выше прямой p_1. Отметим эту область стрелкой. Аналогично строится вторая и третья полуплоскость.

Наконец, условия неотрицательности: $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$ задают все точки первой четверти. Выделяя теперь все точки плоскости, удовлетворяющие всем ограничениям задачи, то есть расположенные одновременно во всех полуплоскостях, получаем множество допустимых планов Y. Оно представляет собой выпуклое многоугольное множество.



Оптимальный план y^* лежит на пересечении прямой p_2 с осью y_1 и имеет вид $y^* = (800, 0)$, значение целевой функции на решении двойственной задачи будет равно $g(y^*) = 24000$.

Сформируем условия равновесия для пары двойственных задач

$$(y_1 + y_2 - 600)x_1 = 0,$$
$$(y_1 + 2y_2 - 800)x_2 = 0,$$

$$(y_1 - 100)x_3 = 0,$$
$$(x_1 + x_2 + x_3 - 30)y_1 = 0,$$
$$(x_1 + 2x_2 - 70)y_2 = 0.$$

Подставляя в каждое условие оптимальный план $y^* = (800, 0)$, получаем

$$\begin{array}{lcl} 200 \cdot x_1 = 0 & & x_1^* = 0 & & \\ 0 \cdot x_2 = 0 & & x_2^* \geq 0 & & x_1^* = 0 \\ 700 \cdot x_3 = 0 & \Rightarrow & x_3^* = 0 & \Rightarrow & x_2^* = 30 \\ (x_1 + x_2 + x_3 - 30) \cdot 800 = 0 & & x_1 + x_2 + x_3 - 30 = 0 & & x_3^* = 0 \\ (x_1 + 2x_2 - 70) \cdot 0 = 0 & & x_1 + 2x_2 - 70 \leq 0 & & \end{array}$$

То есть оптимальный план $x^* = (0, 30, 0)$, $f(x^*) = 24000$. Поскольку на оптимальных планах двойственных задач значения функций совпали $f(x^*) = g(y^*) = 24000$, то задача решена правильно.

Тест по теме «Двойственные задачи линейного программирования»

1. В двойственной паре задач линейного программирования для любых допустимых планов справедливо…

a) $< c, x > \leq < b, y >$;
b) $< c, x > \geq < b, y >$;
c) $< c, x > = < b, y >$.

2. Пусть x^* – решение прямой задачи, а y^* – решение двойственной задачи, тогда справедливо…

a) $< c, x^* > = < b, y^* >$;
b) $< c, x^* > \geq < b, y^* >$;
c) $< c, x^* > \leq < b, y^* >$.

3. Число переменных в двойственной задаче равно…

a) числу основных ограничений в прямой задаче;
b) числу переменных в прямой задаче;
c) числу основных ограничений в двойственной задаче.

4. Дана прямая задача

$$f(x) = 5x_1 + 6x_2 - x_3 \to \max,$$
$$4x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 6,$$
$$7x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -8,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$

тогда целевая функция двойственной задачи будет иметь вид…

a) $g(y) = 6y_1 - 8y_2$;
b) $g(y) = 5y_1 + 6y_2 - y_3$;
c) $g(y) = y_1 + y_2$.

5. Дана прямая задача

$$f(x) = 5x_1 + 6x_2 - x_3 \to \max,$$
$$4x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$$
$$7x_1 - x_2 + 3x_3 \le -8,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

тогда матрица условий двойственной задачи будет иметь вид…

a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 6 \\ 7 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

6. Симметричной двойственной парой называется двойственная пара задач в которой прямая задача – это...

a) стандартная задача линейного программирования;
b) каноническая задача линейного программирования;
c) общая задача линейного программирования.

7. Дана прямая задача

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$6x_1 - 9x_2 \le 12,$$
$$-2x_1 - 6x_2 \le -2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

тогда двойственная задача будет иметь вид…

a) $g(y) = 12y_1 - 2y_2 \to \min$,
$6y_1 - 2y_2 \ge 4$,
$-9y_1 - 6y_2 \ge 5$,
$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$;

b) $g(y) = 12y_1 - 2y_2 \to \min$,
$6y_1 - 2y_2 \le 4$,
$-9y_1 - 6y_2 \le 5$,
$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$;

c) $g(y) = 12y_1 - 2y_2 \to \min$,
$6y_1 - 2y_2 = 4$,
$-9y_1 - 6y_2 = 5$.

8. Дана прямая задача

$$f(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 4,$$

$$x_1 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$
при этом решение двойственной задачи имеет вид $y^* = (2;\, 0)$. Тогда, какая точка является решением прямой задачи?

a) (0; 4);
b) (0; 8);
c) (2; 2).

9. Дана прямая задача
$$f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 \le 2,$$
$$x_2 \le 3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$
тогда решение двойственной задачи будет иметь вид…

a) (2; 1);
b) (0; 0);
c) (2; 0).

10. Если на оптимальном плане x^* ресурс R_i – не дефицитен, то его теневая цена y^* …

a) равна нулю;
b) больше нуля;
c) меньше нуля.

Транспортная задача

В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, затратами на бензин, техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов, которые позволяют оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например, финансовые затраты или время на перевозку грузов. Такие задачи составляют специальный класс задач линейного программирования, и называются транспортными задачами. Целый ряд экономических задач является или модификацией транспортной задачи, или могут быть сведены к транспортной задаче путем определенных преобразований (к таким задачам относятся, например, задача о назначениях).

Рассмотрим постановку и модель транспортной задачи. Имеется m пунктов отправления (поставщиков) грузов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно. Величины a_i, $i = \overline{1, m}$ определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза у поставщиков составляет

$\sum_{i=1}^{m} a_i$. Кроме того, имеется n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$, которые подали заявки на поставку грузов в объемах $b_1, b_2, ..., b_n$ соответственно. Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j обозначим через c_{ij} (транспортный тариф). Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план перевозок груза, то есть найти такие значения объема перевозок груза x_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ от поставщиков A_i к потребителям B_j, чтобы вывести все грузы от поставщиков, удовлетворить заявки всех потребителей и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

Математическая модель транспортной задачи состоит в минимизации функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{29}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., n, \tag{31}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n. \tag{32}$$

Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений (30), (31), определяемое матрицей $X = [x_{ij}]$, называется планом перевозок транспортной задачи. План перевозок, имеющий не более $m + n - 1$ отличных от нуля переменных x_{ij}, называется *опорным*. Если число отличных от нуля компонент в опорном плане равно в точности $m + n - 1$, то план перевозок называется невырожденным, если меньше этого числа, то вырожденным.

План перевозок X^*, при котором функция (29) принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

На практике при перевозке грузов могут возникать следующие ситуации:

1. Количество единиц груза у поставщиков отвечает заявкам или спросу со стороны потребителей, что отражается в условии баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Такая транспортная задача является сбалансированной, а модель такой задачи – закрытой. Математическая модель такой задачи записывается в виде (1)–(4).

2. Количество груза у всех поставщиков больше, чем потребностей в этом грузе у потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Следовательно, часть груза у поставщиков остается невостребованной, а потребители получают весь необходимый груз. Математическая модель такой задачи будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

3. Количество груза у всех поставщиков меньше потребностей в данном грузе у всех потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В этом случае каждый поставщик весь свой груз вывезет, а часть потребителей получит груза меньше необходимого количества. Тогда модель транспортной задачи будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Математические модели транспортной задачи (33), (34) называются открытыми, а задача – несбалансированной.

Транспортная задача является специальной задачей линейного программирования, поэтому ей присущи следующие особенности:

1) ограничения закрытой модели задаются в виде уравнений, а открытой модели – в виде смешанной системы ограничений – неравенств и равенств, которые также могут быть приведены к ограничениям равенствам (каноническая задача линейного программирования);

2) каждая неизвестная входит лишь в два уравнения;

3) коэффициенты при неизвестных равны единице.

С учетом этих особенностей для решения транспортной задачи разработаны специальные методы, которые в настоящее время эффективны лишь при небольшом количестве неизвестных. При большом количестве переменных транспортная задача может быть решена на компьютере, поскольку математические методы, как правило, реализованы в виде специальных программ.

Пример 5.1. Предприятие занимается производством косметики, которую затем поставляет в логистическую компанию. Там она сортируется, упаковывается, консолидируется в большие косметические наборы и затем доставляется оптовым поставщикам.

Логистическая компания располагает тремя пунктами упаковки косметики, расположенными в Твери, Ярославле и Смоленске, откуда сформированные наборы перевозятся на грузовиках к четырем оптовым поставщикам, расположенным в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде и Саратове.

Дневная производительность по формированию косметических наборов составляет 1 300 наборов в день в Твери, 1 800 наборов в Ярославле и 1 500 наборов в Смоленске. Дневной спрос на наборы с косметикой у оптовых поставщиков в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде и Саратове составляет 1 700, 1 300, 700 и 900 наборов соответственно. Стоимость доставки (транспортные тарифы) одного набора из пунктов упаковки к каждому оптовому поставщику приведены в таблице

Пункты упаковки наборов	***Стоимость доставки одного набора из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения***			
	Москва	**Санкт-Петербург**	**Нижний Новгород**	**Саратов**
Тверь	15	32	24	48
Ярославль	17	37	12	42
Смоленск	18	38	28	51

Логистическая компания должна принять решение, сколько наборов с косметикой необходимо отправлять из каждого пункта упаковки каждому оптовому поставщику, чтобы:

1) все наборы с каждого пункта упаковки были вывезены;

2) спрос на наборы с косметикой каждого оптового поставщика был полностью удовлетворен;

3) суммарные затраты на транспортировку всех наборов были минимальными.

Решение. Построим математическую модель этой задачи. Обозначим пункты отправления индексом i, так что $i=1$ соответствует Твери, $i=2$ – Ярославлю и $i=3$ – Смоленску, а пункты назначения – индексом j, при этом $j=1$ соответствует Москве, $j=2$ – Санкт-Петербургу, $j=3$ – Нижнему Новгороду и $j=4$ – Саратову.

Пусть x_{ij} представляют собой объемы ежедневных перевозок наборов между пунктами отправления i $(i=1,2,3)$ и пунктами назначения j $(j=1,2,3,4)$. Тогда план перевозок наборов можно записать в виде матрицы

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}.$$

Транспортные расходы на перевозку наборов косметики из пункта упаковки в Твери ($i=1$) ко всем оптовым поставщикам в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде и Саратове (соответственно $j=1,2,3,4$) составят $15x_{11}+32x_{12}+24x_{13}+48x_{14}$. Аналогично, транспортные расходы на транспортировку наборов из Ярославля ($i=2$) составят $17x_{21}+37x_{22}+12x_{23}+42x_{24}$, а из Смоленска ($i=3$) составят $18x_{31}+38x_{32}+28x_{33}+51x_{34}$. Тогда суммарные транспортные расходы, которые должны быть минимальны, будут равны сумме транспортных расходов по доставке наборов из Твери, Ярославля и Рязани ко всем потребителям:

$$f(x)=15x_{11}+32x_{12}+24x_{13}+48x_{14}+17x_{21}+37x_{22}+12x_{23}+42x_{24}+$$
$$+18x_{31}+38x_{32}+28x_{33}+51x_{34}\to\min.$$

Ограничения транспортной задачи должны содержать ограничения двух видов в соответствии с условиями задачи: (1) все наборы с каждого пункта отправления должны быть вывезены и (2) спрос на наборы в каждом пункте назначения должен быть полностью удовлетворен.

1) Количество наборов, отправляемых с каждого пункта упаковки ко всем оптовым поставщикам, должно быть в точности равно количеству производимых наборов в каждом пункте упаковки. Количество наборов, отправляемых из пункта упаковки в Твери ($i=1$), составляет $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$ и должно быть равно количеству наборов (1 300), упаковываемых в Твери, поэтому соответствующее ограничение имеет вид $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1300$. Аналогично, количество наборов, отправляемых из Ярославля ($i=2$) и Смоленска ($i=3$), должны быть равны количеству производимых на них наборов (1 800 и 1 500 соответственно), так что соответствующие ограничения имеют вид $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1800$ – для Ярославля и $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1500$ – для Смоленска.

2) Спрос на наборы в каждом пункте назначения должен быть в точности равен суммарному объему поставок из всех пунктов отправления. Так, спрос на 1 700 наборов в Москве ($j=1$) должен быть равен объему поставок из всех пунктов отправления наборов, расположенных в Твери, Ярославле и Смоленске, поэтому ограничение имеет вид $x_{11}+x_{21}+x_{31}=1700$. Удовлетворение спроса на наборы в Санкт-Петербурге ($j=2$), Нижнем Новгороде ($j=3$) и Саратове ($j=4$) приводят к ограничениям: $x_{12}+x_{22}+x_{32}=1300$ – для Санкт-Петербурга, $x_{13}+x_{23}+x_{33}=700$ – для Нижнего Новгорода, $x_{14}+x_{24}+x_{34}=900$ – для Саратова. Кроме того, объемы поставок должны быть неотрицательными.

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет вид

$$f(x)=15x_{11}+32x_{12}+24x_{13}+48x_{14}+17x_{21}+37x_{22}+12x_{23}+42x_{24}+$$
$$+18x_{31}+38x_{32}+28x_{33}+51x_{34}\to\min,$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1300,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1800,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1500,$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1700,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1300,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=700,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=900,$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,3,\ j=1,2,3,4.$$

Обратим внимание на следующие особенности транспортной модели:

– переменные модели x_{ij} имеют два индекса, первый индекс i соответствует номеру поставщика, а второй индекс j – номеру пункта назначения груза;

– ограничения записываются в форме равенств;

– при целых значениях объемов запаса и спроса оптимальное решение задачи будет целочисленным.

В основе решения транспортной задачи лежит метод, состоящий из трех этапов:

1) построение начального опорного плана перевозок;
2) проверка построенного плана на оптимальность;
3) улучшение построенного плана перевозок.

Как отмечено выше, первым этапом решения транспортной задачи является построение начального опорного плана перевозок, т.е. плана перевозок, удовлетворяющего всем ее ограничениям. Приведем два метода построения такого плана – метод северо-западного угла и метод минимального тарифа. Их сущность состоит в том, что начальный план перевозок находят за не более чем $(m+n-1)$ шагов, на каждом из которых в транспортной таблице заполняют одну клетку, которую называют занятой. Заполнение одной клетки обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения, либо вывоз груза из одного из пунктов отправления. Различаются эти планы по принципам выбора заполняемых клеток и в зависимости от этого могут давать планы, более и менее отличные от оптимального.

Рассмотрим оба метода для таблицы

Поставщики	***Потребители***				***Запас***
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Спрос	b_1	b_2	…	b_n	

1) Метод северо-западного угла. Заполнение таблицы начинается с левой верхней клетки, куда дается максимально возможная поставка. Объем поставки выбирается таким образом, чтобы полностью закрыть либо потребность по

столбцу b_1, либо запас по строке a_1, т.е. в качестве x_{11} выбирают минимум между запасами груза на первом складе и потребностями в грузе у первого потребителя: $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. Дальнейшее заполнение таблицы происходит слева направо, сверху вниз. На каждом шаге заполнения должна выпасть либо строка, либо столбец таблицы.

2) Метод наименьшего тарифа. Заполнение таблицы начинается с клетки с наименьшим тарифом. Если таких клеток несколько, то заполняется та, у которой объем перевозок больше. Объем поставки определяется так же, как и в методе северо-западного угла. Заполнив первую клетку, среди оставшихся клеток выбираем клетку с наименьшим тарифом и т.д.

Замечание: Если транспортная задача является открытой и введены фиктивные поставщики или фиктивные потребители, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей: от фиктивных поставщиков к фиктивным потребителям груз направляется в последнюю очередь.

Если число занятых клеток в построенном плане перевозок меньше, чем $m+n-1$, т.е. план является вырожденным, то необходимо внести 0^* (0^* – вводится фиктивная перевозка) в несколько свободных клеток транспортной таблицы так, чтобы общее число занятых клеток стало равным $m+n-1$, т.е. построенный план перевозок стал невырожденным.

При составлении начального опорного плана, заполняя клетку таблицы, из рассмотрения выводится либо строка, либо столбец таблицы. Если запас в строке и спрос в столбце совпадают, то после заполнения соответствующей клетки таблицы пришлось бы выводить строку и столбец одновременно, чего делать нельзя, так как число занятых клеток будет меньше, чем $m+n-1$. Поэтому выводить из рассмотрения можно, например, строку, тогда потребности в соответствующем столбце полагают равными 0. Аналогично, если из рассмотрения убирают столбец, то запасы в соответствующей строке становятся нулевыми. Тогда на одном из следующих шагов заполнения таблицы появится фиктивная перевозка, равная 0 (0^*).

Вторым этапом решения транспортной задачи является проверка построенного плана на оптимальность и его улучшение (если он не оптимален). Эту задачу решают с помощью метода потенциалов.

Применение метода потенциалов основано на следующей теореме.

Теорема. *Для оптимальности опорного плана перевозок* $X = [x_{ij}]$ *транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы существовали числа* u_i, $i = 1, \ldots, m$ *(потенциалы поставщиков) и* v_j, $j = 1, \ldots, n$, *(потенциалы потребителей) удовлетворяющие условиям*

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0;$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0.$$

Замечание. Теорема допускает следующую экономическую интерпретацию. Пусть каждый поставщик A_i вносит за перевозку единицы груза (одному или нескольким потребителям) какую-то сумму u_i, в свою очередь каждый из потребителей B_j также вносит за перевозку единицы груза сумму v_j. Допустим, что эти платежи передаются некоторому третьему лицу (перевозчику).

Предположим, что интересы поставщиков и потребителей не противоречат друг другу, и они действуют как единая экономическая система. Пусть перевозка единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения объективно стоит c_{ij}, а поставщик A_i и потребитель B_j вместе платят за эту перевозку сумму $u_i + v_j = \bar{c}_{ij}$, которая называется «псевдо стоимостью» перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Платежи u_i и v_j не обязательно должны быть положительными: не исключено, что перевозчик сам платит либо поставщику, либо потребителю премию за перевозку.

Очевидно, что оптимальным будет такой план перевозок, при котором поставщик A_i и потребитель B_j не переплачивают перевозчику ничего сверх объективной стоимости перевозок c_{ij}, т.е. такой план, любое отступление от которого не выгодно ни поставщику, ни потребителю, так как заставит их платить за перевозку больше, чем, если бы они возили грузы сами.

Равенства $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток образуют систему с $m+n$ неизвестными u_i и v_j, а число уравнений этой системы равно $m+n-1$ (по числу занятых клеток невырожденного плана перевозок). Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одну из неизвестных можно задать произвольно, а остальные найти из системы.

Неравенства $u_i + v_j \le c_{ij}$ для свободных клеток используются для проверки оптимальности плана перевозок. Введем числа

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},$$

которые называются *оценками*. Таким образом, согласно теореме, опорный *план перевозок будет оптимален, если для всех свободных клеток таблицы оценки неположительны.*

Если приведенное выше условие не выполняется, то построенный опорный план не является оптимальным. Чтобы его улучшить, требуется ввести понятие цикла.

Цикл – это замкнутая ломаная линия, звенья которой параллельны строкам и столбцам таблицы, а вершины лежат в занятых клетках.

Из клетки, которой соответствует наибольшая положительная оценка, начнем строить цикл, поставив в этой клетки знак «+». Вершинам цикла поочередно присваиваем знаки «+» и «–». Из объемов груза, стоящих в минусовых клетках, выбирают наименьший и обозначают через θ.

В новой таблице прибавляют θ к объемам груза в «плюсовых» клетках и вычитают θ из объемов «минусовых» клеток.

Полученный опорный план перевозок проверяем на оптимальность. Описанная процедура повторяется несколько раз, пока не будет найдено оптимальное решение.

Пример 5.2. Компания владеет двумя заводами A_1, A_2. Соответствующие объемы производства равны 220 и 100 единиц продукции. Компания обязалась поставить в города B_1, B_2 и B_3 соответственно 80, 110 и 120 единиц. При заданных в таблице стоимостях перевозок единицы продукции составьте план ее распределения, чтобы общая стоимость перевозок была наименьшей

Заводы	Города		
	B_1	B_2	B_3
A_1	10	13	25
A_2	30	10	20

Решение. Построим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} представляют собой объем продукции перевозимой с завода A_i $(i=1,2)$ в город B_j $(j=1,2,3)$.

Установим характер задачи. Поскольку суммарные запасы поставщиков $(\sum_{i=1}^{2} a_i = 220+100=320)$ больше суммарного спроса потребителей $(\sum_{j=1}^{3} b_j = 80+110+120=310)$, то заключаем, что данная задача является несбалансированной. Тогда математическая модель задачи будет записана в виде (20)

$$f(x)=10x_{11}+13x_{12}+25x_{13}+30x_{21}+10x_{22}+20x_{23}\to\min,$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 220,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 100,$$
$$x_{11}+x_{21}=80,$$
$$x_{12}+x_{22}=110,$$
$$x_{13}+x_{23}=120,$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,\ j=1,2,3.$$

Для решения этой задачи приведем ее к сбалансированному виду. Для этого введем фиктивного потребителя, спрос которого равен разности объемов запаса и потребления

$$b_4=\sum_{i=1}^{2} a_i-\sum_{j=1}^{3} b_j = 320-310=10.$$

Стоимость перевозок фиктивному потребителю считается нулевой. С учетом этого математическая модель задачи примет вид

$$f(x)=10x_{11}+13x_{12}+25x_{13}+30x_{21}+10x_{22}+20x_{23}\to\min,$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=220,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=100,$$
$$x_{11}+x_{21}=80,$$
$$x_{12}+x_{22}=110,$$

$$x_{13} + x_{23} = 120,$$
$$x_{14} + x_{24} = 10,$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \; j = 1, 2, 3, 4.$$

Математическая модель стала закрытой. Перейдем к решению задачи.

Рассмотрим один из методов построения начального плана перевозок – метод минимального тарифа.

Алгоритм построения первого плана перевозок этим методом включает следующие этапы:

1) среди тарифов находится наименьший;

2) клетка с выбранным тарифом заполняется величиной, равной максимально возможному объему груза с учетом ограничений по строке и по столбцу. При этом либо весь груз вывозится от поставщика, либо полностью удовлетворяется спрос потребителя. Строка или столбец таблицы вычеркивается и в дальнейшем в распределении не участвует;

3) из оставшихся тарифов вновь находится минимальный, и процесс продолжается до тех пор, пока не будет распределен весь груз.

Если модель транспортной задачи открытая и введены фиктивный поставщик или потребитель, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей и в последнюю очередь нераспределенный груз направляется от фиктивного поставщика или к фиктивному потребителю.

Для построения начального плана перевозок построим транспортную таблицу. Число строк таблицы равно числу поставщиков в задаче, а число столбцов – числу потребителей. В правый верхний угол каждой клетки вносим тариф, соответствующий перевозкам, и рядом с таблицей указываем запасы и спрос каждого поставщика и потребителя

10	**13**	**25**	**0**	**220**
30	**10**	**20**	**0**	**100**
80	**110**	**120**	**10**	

На первом шаге построения начального плана перевозок, выберем в таблице клетку с наименьшим тарифом, не обращая внимание, на фиктивного потребителя. Если таких клеток несколько можно взять любую. Возьмем, например первую клетку в таблице с тарифом $c_{11} = 10$. Далее определяем, какое количество продукции будем перевозить с завода A_1 в город B_1, как минимальное значение между запасом поставщика A_1 и спросом потребителя B_1, то есть $x_{11} = \min\{220, \; 80\} = 80$. Следовательно, в первую клетку таблицы помещаем $x_{11} = 80$. Спрос первого города B_1 полностью удовлетворен и этот город вычеркивается из таблицы, а запас города A_1 становится 220 – 80 = 140.

10 80	13	25	0	~~220~~ 140
30	10	20	0	100
~~80~~	110	120	10	

На втором шаге опять выбираем клетку с минимальным тарифом среди тех, которые не удалили из таблицы. Таким тарифом является $c_{22} = 10$. Определяем количество продукции перевозимое с завода A_2 в город B_2, как минимум между запасом завода A_2 и потребностями города B_2, то есть $x_{22} = \min\{100, 110\} = 100$. Запас завода A_2 становится нулевым и этот завод удаляем из таблицы, а спрос города B_2 необходимо пересчитать: 110 – 100= 10.

10 80	13	25	0	~~220~~ 140
30	10 100	20	0	~~100~~
~~80~~	~~110~~ 10	120	10	

На следующем шаге все повторяется сначала и так до тех пор, пока, вся продукция не будет распределена.

10 80	13 10	25	0	~~220~~ ~~140~~ 130
30	10 100	20	0	~~100~~
~~80~~	~~110~~ ~~10~~	120	10	

10 80	13 10	25 120	0	~~220~~ ~~140~~ ~~130~~ 10
30	10 100	20	0	~~100~~
~~80~~	~~110~~	~~120~~	10	

	~~10~~			
10 **80**	**13** **10**	**25** **120**	**0** **10**	~~220~~ ~~140~~ ~~130~~ ~~10~~
30	**10** **100**	**20**	**0**	~~100~~
~~80~~	~~110~~ ~~10~~	~~120~~	~~10~~	

Таким образом, пришли к следующей транспортной таблице

10 **80**	**13** **10**	**25** **120**	**0** **10**
30	**10** **100**	**20**	**0**

Следовательно, начальный план перевозок имеет вид

$$X^0 = \begin{pmatrix} 80 & 10 & 120 & 10 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

стоимость перевозок при построенном плане составит

$$f(X^0) = 800 + 130 + 3000 + 1000 = 4930.$$

Найденный план перевозок проверяется на оптимальность по следующему критерию: если построенный план является оптимальным, то ему соответствует система $m+n$ (число строк плюс число столбцов) действительных чисел $u_i,\ i=1,2$ и $v_j,\ j=1,2,3,4$, удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ для свободных клеток. Числа $u_i,\ i=1,2$ и $v_j,\ j=1,2,3,4$ называют потенциалами.

Используя первое условие критерия оптимальности, составим систему уравнений для поиска всех потенциалов в задаче

$$u_1 + v_1 = 10,$$
$$u_1 + v_2 = 13,$$
$$u_1 + v_3 = 25,$$
$$u_1 + v_4 = 0,$$
$$u_2 + v_2 = 10.$$

Полагаем $u_1 = 0$, тогда решение системы будет иметь вид $v_1 = 10,\ v_2 = 13,\ v_3 = 25,\ v_4 = 0,\ u_2 = -3$. Для свободных клеток вычисляем оценки

$$\Delta_{21} = -3 + 10 - 30 = -23,$$

$$\Delta_{23} = -3 + 25 - 20 = 2,$$
$$\Delta_{24} = -3 + 0 - 0 = -3.$$

Наличие положительной оценки свободной клетки ($\Delta_{23} = 2$) при проверке плана на оптимальность свидетельствует о том, что построенный план перевозок не является решением и для уменьшения стоимости перевозок надо перейти к другому плану. Для этого построим цикл начальная вершина, которого будет расположена в клетке с положительной оценкой.

Циклом называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки пересечения не являются вершинами. Для каждой свободной клетки таблицы можно построить единственный цикл.

Всем вершинам цикла, начиная с вершины, находящейся в свободной клетке, присваиваются поочередно знаки «+» и «–».

10 **80**	13 **10** +	25 **120** −	0 **10**
30	10 **100** −	20 +	0

Определим количество продукции, которое проведем по циклу. Для этого выбираем минимальное содержимое минусовых клеток $\min\{100,\ 120\} = 100$. Полученное значение прибавляем к количеству продукции, стоящему у положительных вершин цикла, и отнимаем от количества продукции, соответствующего отрицательным вершинам. Новый план перевозок будет иметь вид

10 **80**	13 **110**	25 **20**	0 **10**
30	10	20 **100**	0

Проверим полученный план на оптимальность. Система на поиск потенциалов имеет вид

$$u_1 + v_1 = 10,$$
$$u_1 + v_2 = 13,$$

$$u_1 + v_3 = 25,$$
$$u_1 + v_4 = 0,$$
$$u_2 + v_3 = 20.$$

Полагаем $u_1 = 0$, тогда решение системы будет иметь вид $v_1 = 10,\ v_2 = 13,\ v_3 = 25,\ v_4 = 0,\ u_2 = -5$. Для свободных клеток вычисляем оценки

$$\Delta_{21} = -5 + 10 - 30 = -25,$$
$$\Delta_{22} = -5 + 13 - 10 = -2,$$
$$\Delta_{24} = -5 + 0 - 0 = -5.$$

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, построенный план перевозок является решением задачи

$$X^* = \begin{pmatrix} 80 & 110 & 20 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

минимальная стоимость перевозок составит

$$f(X^*) = 800 + 1430 + 500 + 2000 = 4730.$$

Тест по теме «Транспортная задача»

1. Фирма «Союз» обеспечивает доставку DVD-дисков с двух складов, расположенных в разных точках города, в три магазина. Запас дисков, имеющихся на складах, а также объемы заказов магазинов и тарифы на доставку представлены в таблице

Склады	*Магазины*			*Запасы, тыс. шт.*
	№ 1	*№ 2*	*№ 3*	
Склад № 1	5	2	7	25
Склад № 2	8	3	6	30
Заказы, тыс. шт.	20	28	22	

Определите объемы перевозок, обеспечивающих их минимальные затраты.

Математическая модель задачи будет иметь вид…

a) $f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} \to \min$,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30,$$
$$x_{11} + x_{21} \le 20,$$
$$x_{12} + x_{22} \le 28,$$
$$x_{13} + x_{23} \le 22,$$
$$x_{ij} \ge 0,\quad i = 1, 2,\quad j = 1, 2, 3.$$

b) $f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} \to \min$,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25,$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=30,$$
$$x_{11}+x_{21}=20,$$
$$x_{12}+x_{22}=28,$$
$$x_{13}+x_{23}=22,$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,\quad j=1,2,3.$$

c) $f(x)=5x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+8x_{21}+3x_{22}+6x_{23}\to\min$,

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 25,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 30,$$
$$x_{11}+x_{21}=20,$$
$$x_{12}+x_{22}=28,$$
$$x_{13}+x_{23}=22,$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,\quad j=1,2,3.$$

2. Математическая модель транспортной задачи Фирма «Союз» обеспечивает доставку DVD-дисков с двух складов, расположенных в разных точках города, в три магазина. Запас дисков, имеющихся на складах, а также объемы заказов магазинов и тарифы на доставку представлены в таблице

Склады	*Магазины*			*Запасы, тыс. шт.*
	№ 1	*№ 2*	*№ 3*	
Склад № 1	5	2	7	25+a
Склад № 2	8	3	6	30
Заказы, тыс. шт.	20	28	22	

Определите объемы перевозок, обеспечивающих их минимальные затраты. При каком параметре a транспортная задача является сбалансированной?

a) a = 15;

b) a = 10;

c) a = 20.

3. Московский филиал фирмы The Coca-Cola Company, выпускающей газированные напитки Sprite и Coca-Cola, складируемые в разных местах, должен поставить продукцию в три крупных московских супермаркета: «Рамстор», «Седьмой континент», «Арбатский». Тарифы на доставку товара, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице

Склады	*Супермаркеты*			*Запасы, уп.*
	«Рамстор»	*«Седьмой континент»*	*«Арбатский»*	
Coca-Cola	7	5	2	25
Sprite	4	3	6	20
Заказы, уп.	15	15	15	

Определите оптимальный план поставок газированных напитков в супермаркеты города, чтобы транспортные расходы были минимальны.

Начальный план перевозок, построенный методом «минимального тарифа» будет иметь вид…

a) $X^0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $X^0 = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$;

c) $X^0 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Автотранспортная компания «Астрада» обеспечивает доставку шин Bridgestone с двух оптовых складов, расположенных в Москве и Нижнем Новгороде в три магазина в Чебоксарах, Набережных Челнах и Казани. Объемы запасов шин на складах, объемы заявок магазинов и тарифы на перевозку приведены в таблице

Склады в городах	*Магазины*			*Запасы*
	Чебоксары	*Набережные Челны*	*Казань*	
Москва	4	7	5	80
Нижний Новгород	3	5	8	20
Заявки	30	40	30	

Определите оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Начальный план перевозок, построенный методом «северо-западного угла» будет иметь вид…

a) $X^0 = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$;

b) $X^0 = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $X^0 = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 30 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Автотранспортная компания «Астрада» обеспечивает доставку шин Bridgestone с двух оптовых складов, расположенных в Москве и Нижнем Новгороде в три магазина в Чебоксарах, Набережных Челнах и Казани. Объемы запасов шин на складах, объемы заявок магазинов и тарифы на перевозку приведены в таблице

Склады в городах	*Магазины*			*Запасы*
	Чебоксары	*Набережные Челны*	*Казань*	
Москва	4	7	5	80

Склады в городах	*Магазины*			*Запасы*
	Чебоксары	*Набережные Челны*	*Казань*	
Нижний Новгород	3	5	8	20
Заявки	30	40	30	

Определите оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Является ли план перевозок $X^0 = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ оптимальным?

a) не является оптимальным;

b) является оптимальным.

6. Московский филиал фирмы *The Coca-Cola Company*, выпускающей газированные напитки *Sprite* и *Coca-Cola*, складируемые в разных местах, должен поставить продукцию в три крупных московских супермаркета: «Рамстор», «Седьмой континент», «Арбатский». Тарифы на доставку товара, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице

Склады	*Супермаркеты*			*Запасы, уп.*
	«Рамстор»	*«Седьмой континент»*	*«Арбатский»*	
Coca-Cola	7	5	2	25
Sprite	4	3	6	20
Заказы, уп.	15	15	15	

Определите оптимальный план поставок газированных напитков в супермаркеты города, чтобы транспортные расходы были минимальны.

При проверке плана перевозок $X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ на оптимальность, оценки будут иметь вид…

a) $\Delta_{12} = 1$,

$\Delta_{23} = -7$;

b) $\Delta_{12} = 15$,

$\Delta_{23} = 4$;

c) $\Delta_{12} = 5$,

$\Delta_{23} = 6$.

7. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА («Алмазы России – Саха») на покупку промышленного золота для его реализации в трех городах: Самара, Ростов-на-Дону и Санкт-Петербург. Компания располагает двумя месторождениями – «Мирное» и «Удачный». Объемы выработки золота на каждом месторождении, заявки на реализацию и транспортные расходы приведены в таблице

Месторождения	*Магазины*			*Объем выработки*
	Самара	*Ростов-на-Дону*	*Санкт-Петербург*	
«Мирное»	8	10	6	22
«Удачный»	9	7	5	28
Заявки	20	14	16	

Определите оптимальный план перевозок золота, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Для плана перевозок $X = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$, значение потенциала v_2 равно…

a) 10;
b) 2;
c) 12.

8. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА («Алмазы России – Саха») на покупку промышленного золота для его реализации в трех городах: Самара, Ростов-на-Дону и Санкт-Петербург. Компания располагает двумя месторождениями – «Мирное» и «Удачный». Объемы выработки золота на каждом месторождении, заявки на реализацию и транспортные расходы приведены в таблице

Месторождения	*Магазины*			*Объем выработки*
	Самара	*Ростов-на-Дону*	*Санкт-Петербург*	
«Мирное»	8	10	6	22
«Удачный»	9	7	5	28
Заявки	20	14	16	

Определите оптимальный план перевозок золота, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Для плана перевозок $X = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$, значение потенциала u_2 равно…

a) –3;
b) 2;
c) 7.

9. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА («Алмазы России – Саха») на покупку промышленного золота для его реализации в трех городах: Самара, Ростов-на-Дону и Санкт-Петербург. Компания располагает двумя месторождениями – «Мирное» и «Удачный». Объемы выработки золота на каждом месторождении, заявки на реализацию и транспортные расходы приведены в таблице

Месторождения	*Магазины*			*Объем выработки*
	Самара	*Ростов-на-Дону*	*Санкт-Петербург*	
«Мирное»	8	10	6	22
«Удачный»	9	7	5	28
Заявки	20	14	16	

Определите оптимальный план перевозок золота, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Оптимальный план перевозок имеет вид…

a) $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & 14 \end{pmatrix}$;

b) $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$;

c) $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Автотранспортная компания «Астрада» обеспечивает доставку шин Bridgestone с двух оптовых складов, расположенных в Москве и Нижнем Новгороде в три магазина в Чебоксарах, Набережных Челнах и Казани. Объемы запасов шин на складах, объемы заявок магазинов и тарифы на перевозку приведены в таблице

Склады в городах	*Магазины*			*Запасы*
	Чебоксары	*Набережные Челны*	*Казань*	
Москва	4	7	5	80
Нижний Новгород	3	5	8	20
Заявки	30	40	30	

Определите оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Минимальные транспортные расходы в этой задаче равны…

a) 510;

b) 540;

c) 490.

Решение оптимизационных задач в MS Excel

Оптимизационные математические модели описывают операции, в которых требуется найти оптимальное или наилучшее, в некотором смысле, решение. Оптимизационные математические модели особенно широко применяются при решении проблем менеджмента и экономики и вообще при принятии решений. Особенное место, занимаемое оптимизационными математическими моделями, обусловлено тем, что любые операции, рассматриваемые в экономике, проходят с участием человека и направлены на достижение определенной цели. Поэтому человек, осуществляющий операцию, всегда заинтересован не просто в том, чтобы достичь цели, но достичь ее самым эффективным, наилучшим или оптимальным образом с наименьшими затратами, в кратчайшее время и т.д. А поскольку для достижения поставленных в операции целей ею необходимо управлять и на каждом этапе управления принимать решения, то человек стремится вырабатывать не какие-нибудь управления, пусть даже, кое-как и приводящие к цели, а наилучшие управления. Отсюда следует, что наиболее адекватным реальным проблемам менеджмента и экономики инструментом для выработки наилучших управлений и принятия наилучших решений являются оптимизационные математические модели, позволяющие находить оптимальные решения и оптимальные управления.

Для оптимизационных моделей характерно наличие целевой функции или нескольких целевых функций, которые необходимо максимизировать или минимизировать, в зависимости от содержательного смысла операции и выбранного критерия, а также наличие ограничений. Если ограничений нет, то говорят о математической модели безусловной оптимизации, при наличии ограничений – о математической модели с ограничениями. Оптимизационные модели могут быть линейными и нелинейными, иметь один критерий или много критериев (многокритериальные модели). Если число переменных оптимизационной модели или число ограничений составляет десятки, сотни, то необходимо использовать компьютерное моделирование.

Среди средств компьютерного моделирования электронные таблицы *Microsoft Excel* занимают в деятельности менеджера или экономиста особое место. Это обусловлено многими причинами:

– распространенность пакета *MS Office*, а с ним и *MS Excel* во всем мире, в том числе и в России, такова, что в какой бы организации ни работал экономист или менеджер – в госучреждении, фирме, магазине, складе, органах управления любого уровня – от государственного до муниципального – пакет *MS Excel* всегда оказывается доступным;

– работу *MS Excel* может освоить пользователь любого уровня, обладающий элементарными сведениями по информатике и навыками работы на персональном компьютере;

– *MS Excel* обладает мощными средствами подготовки документов, анализа данных и решения разнообразных задач в различных областях деятельности, таких как финансы, экономика, статистика и т.д.

Все это определило выбор именно пакета *MS Excel* как компьютерного средства моделирования и решения оптимизационных задач менеджмента и экономики. Компьютерное моделирование в среде *MS Excel* осуществляется посредством надстройки «**Поиск решения**», входящей в состав пакета *MS Excel*, включает в себя следующие шаги:

– запуск среды *Microsoft Office Excel*,

– организацию исходных данных в рабочей книге *Excel,*

– задание исходных данных математической модели,

– вызов прикладной программы «**Поиск решения**», которая должна быть установлена в *MS Excel,*

– задание в «**Поиске решения**» переменных модели, целевой функции и ограничений,

– поиск оптимального решения математической модели, осуществляемый в результате работы прикладной программы «**Поиск решения**».

Компьютерное моделирование задач линейного программирования разберем на конкретных примерах.

Задача планирования производства

Небольшая семейная фирма занимается переработкой яблок и производством из них трех видов продукции: яблочного сока, джема и яблочного пюре. Для производства сока используются яблоки только первого сорта, а для производства джема и яблочного пюре используются яблоки, как первого, так и второго сорта. На производство сока, джема и пюре затрачиваются сахарный песок и лимонная кислота. Количество яблок первого и второго сорта, сахарного песка и лимонной кислоты, которыми располагает фирма, ограниченны. Нормы расхода всех видов сырья и их запасы на складе компании приведены в таблице

Сырье	***Расход сырья на выпуск 1 кг продукции, кг***			***Запасы сырья на складе фирмы, кг***
	сок	***джем***	***пюре***	
Яблоки 1 сорта	*3*	*6*	*4*	*2 000*
Яблоки 2 сорта	*0*	*3*	*5*	*1 500*
Сахарный песок	*2*	*1,5*	*2*	*1 500*
Лимонная кислота	*0,1*	*0,15*	*0,2*	*74*

Глава фирмы оценил значение прибыли, которую он получит от реализации 1 кг каждого вида продукции; она составила: 60 ден. ед. для сока, 100 ден. ед. для джема и 90 ден. ед. для пюре.

Необходимо так спланировать производство продукции, т.е. определить, какую продукцию и в каком объеме следует выпускать фирме, чтобы суммарная прибыль от их реализации была максимальна.

Составим математическую модель задачи. Переменными модели являются объемы выпуска яблочного сока (x_1), джема (x_2) и яблочного пюре (x_3).

Целевая функция задачи представляет собой суммарную прибыль от реализации произведенной продукции. Прибыль от реализации единицы (1 кг) яблочного сока составляет 60 ден. ед., а если сок будет произведен в объеме x_1 кг, то прибыль от реализации этого количества сока будет равна произведению $60x_1$ ден. ед. Аналогично, прибыль от реализации джема и пюре, выпущенных в количестве x_2 и x_3 кг, составит $100x_2$ и $90x_3$ ден. ед. Тогда суммарная прибыль от реализации произведенных объемов сока, джема и пюре будет равна сумме $60x_1 + 100x_2 + 90x_3$ ден. ед., которую по условию задачи надо сделать как можно больше. Таким образом, целевая функция запишется в виде

$$f(x) = 60x_1 + 100x_2 + 90x_3 \to \max .$$

Конечные запасы каждого вида сырья ограничивают их расход при производстве всех видов продукции. Выразим расход каждого вида сырья через переменные задачи. Начнем с первого вида сырья – яблок 1 сорта.

На производство 1 кг сока расходуется 3 кг яблок 1 сорта. Если сок будет выпущен в количестве x_1 кг, то на это количество сока будет израсходовано $3x_1$ кг яблок 1 сорта. Аналогично, если джем и пюре будут выпущены в количестве x_2 и x_3 кг, то на их выпуск яблок 1 сорта будет затрачено в количестве $6x_2$ и $4x_3$ кг. Суммарный расход яблок 1 сорта на выпуск сока, джема и пюре в количестве x_1, x_2 и x_3 кг соответственно составит $3x_1 + 6x_2 + 4x_3$ кг, и это количество не должно превышать запаса яблок 1 сорта равного 2 000 кг. Поэтому первое ограничение на расход яблок 1 сорта запишется в виде $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 2000$.

Аналогичные рассуждения приводят к следующим ограничениям на расход сырья при производстве сока, джема и пюре

– яблоки 2 сорта

$$3x_2 + 5x_3 \le 1500,$$

– сахарный песок

$$2x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 \le 1500,$$

– лимонная кислота

$$0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 \le 74.$$

И наконец, объемы производства сока, джема и пюре не могут быть отрицательными, хотя и могут быть равными нулю. Это условие добавляет следующие ограничения на объемы выпуска продукции $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

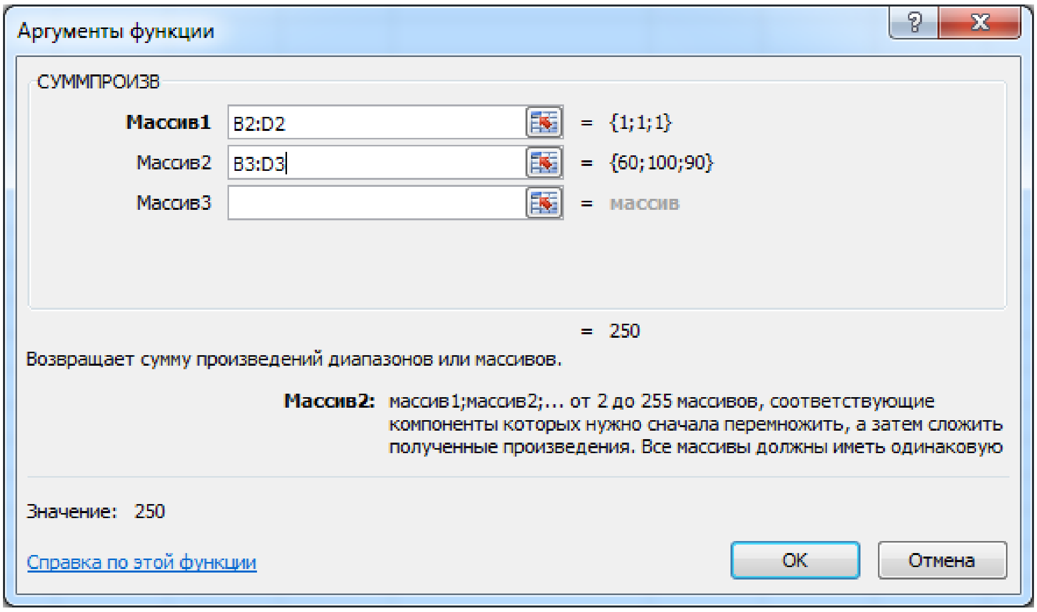
Таким образом, оптимизационная математическая модель, описывающая объемы производства сока, джема и пюре при условии выполнения ограничений на расход ресурсов имеет вид

$$f(x) = 60x_1 + 100x_2 + 90x_3 \to \max,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 2000,$$
$$3x_2 + 5x_3 \le 1500,$$
$$2x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 \le 1500,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 \le 74,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

После того как оптимизационная модель построена, необходимо решить ее, другими словами, найти оптимальные значения объемов производства сока, джема и пюре, при которых прибыль от их реализации будет максимальной и которые удовлетворят всем ограничениям-неравенствам. Создадим аналог этой модели в среде *MS Excel*. Для этого на лист, который назовем «Оптимальное производство» занесем все исходные данные, сформировав две таблицы, как показано на рисунке

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Продукция*	*Сок*	*Джем*	*Пюре*	*Суммарная прибыль*		
2	*Оптимальное производство*	1	1	1			
3	*Прибыль от 1 кг*	60	100	90			
4							
5							
6	*Сырье*	*Расход сырья на 1 кг*			*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Яблоки 1 сорта*	3	6	4		2000	
8	*Яблоки 2 сорта*	0	3	5		1500	
9	*Сахарный песок*	2	1,5	2		1500	
10	*Лимонная кислота*	0,1	0,15	0,2		74	
11							
12							
13							

В ячейки B2, C2, D2 введем начальный план выпуска сока, джема и пюре, здесь он задан единицами, поскольку при решении задач от начальных значений переменных не зависит ни оптимальное решение, ни время его поиска. В ячейки B3, C3, D3 запишем прибыль одного килограмма выпускаемой продукции и на основании этих двух строк подсчитаем значение целевой функции, а именно суммарную прибыль от реализации килограмма сока, килограмма джема и килограмма пюре. Для этого воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Для того чтобы воспользоваться этой функций, установим курсор в ячейку E2 и выберем в меню вкладку **Формулы,** а далее **Математические**. В появившемся окне выбираем искомую функцию СУММПРОИЗВ.



Для формирования суммарной прибыли заполним поле Массив 1, выделив ячейки B2, C2, D2 курсором, а для поля Массив 2, ячейки B3, C3, D3, как показано на рисунке.

После нажатия кнопки *ОК*, в ячейке E2 увидим суммарную прибыль, полученную от реализации килограмма сока, килограмма джема и килограмма пюре. Другими словами, значение целевой функции при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$.

Теперь аналогичным образом, отразим во второй таблице суммарный расход сырья для производства продукции. Таким образом, получим следующие формулы:

– в ячейке E7 реализована функция СУММПРОИЗВ (B2:D2; B7:D7);
– в ячейке E8 реализована функция СУММПРОИЗВ (B2:D2; B8:D8);
– в ячейке E9 реализована функция СУММПРОИЗВ (B2:D2; B9:D9);
– в ячейке E10 реализована функция СУММПРОИЗВ (B2:D2; B10:D10).

В этих ячейках указан суммарный расход яблок 1 сорта, яблок 2 сорта, сахарного песка и лимонной кислоты для любого набора выпускаемой продукции.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Продукция*	*Сок*	*Джем*	*Пюре*	*Суммарная прибыль*		
2	*Оптимальное производство*	1	1	1	250		
3	*Прибыль от 1 кг*	60	100	90			
4							
5							
6	*Сырье*	*Расход сырья на 1 кг*			*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Яблоки 1 сорта*	3	6	4	13	2000	
8	*Яблоки 2 сорта*	0	3	5	8	1500	
9	*Сахарный песок*	2	1,5	2	5,5	1500	
10	*Лимонная кислота*	0,1	0,15	0,2	0,45	74	
11							
12							
13							

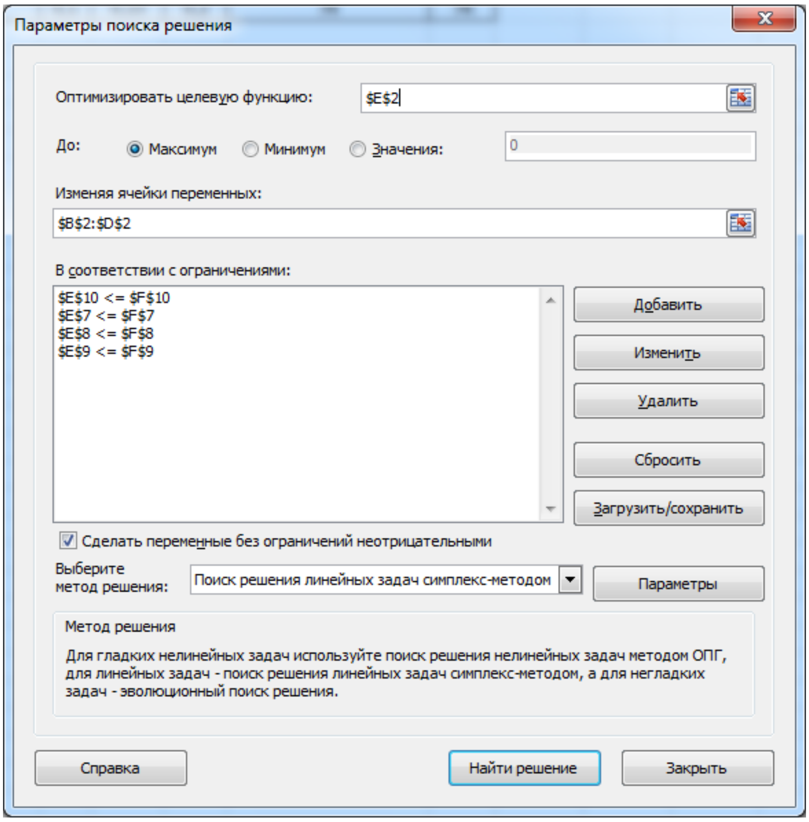
Для поиска оптимального решения в меню выберем вкладку **Данные** и в этой вкладке активизируем надстройку **Поиск решения**. Рассмотрим поподробнее процесс создания компьютерной модели задачи.

В поле ***Оптимизировать целевую ячейку*** должен находиться адрес ячейки содержащие суммарную прибыль, а именно E2. Содержимое этой ячейки можно максимизировать, минимизировать или для нее можно задать какое-либо постоянное значение. В рамках рассматриваемой задачи на поиск максимальной прибыли, выделяем значение *Максимум*.

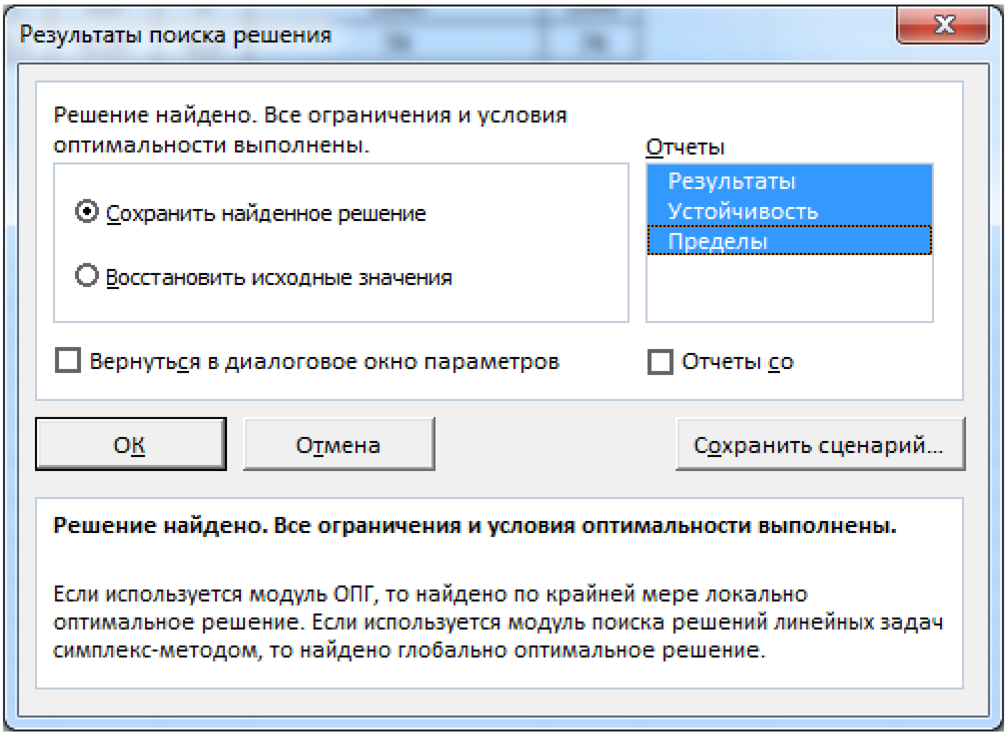
Активизировав поле ***Изменяя ячейки переменных***, с помощью курсора вводим ячейки B2:D2, которые отвечают за оптимальное количество продукции. Значения этих ячеек будут изменяться в процессе поиска оптимального решения.

Следующим этапом опишем основные ограничения рассматриваемой задачи. Для этого активизируем поле ***В соответствии с ограничениями***, нажав кнопку *Добавить*. Эта кнопка служит для отображения окна ***Добавление ограничения***. В поле ***Ссылка на ячейки*** запишем ячейку содержащую расход яблок 1 сорта на килограмм выпускаемой продукции, то есть ячейку E7. В поле ***Ограничение*** запишем общие запасы яблок 1 сорта в фирме, то есть ячейку F7. Согласно построенной модели расход ресурса не превосходит его запас, следовательно, неравенство формирует знак «$\leq$».

Аналогично опишем ограничения, соответствующие яблокам 2 сорта, сахарному песку и лимонной кислоте. Активизируем условие ***Сделать переменные без ограничений неотрицательными*** и выберем метод решения задачи. Для решения линейных задач программа предлагает воспользоваться симплекс-методом. Для выбора этого метода нужно воспользоваться опцией висячего меню. В результате заполнения всех полей и внесения всех ограничений в диалоговое окно **Поиск решений** задача примет вид



Запустим вычислительный процесс поиска оптимального решения с помощью кнопки ***Найти решение***. После нахождения оптимального плана производства на экране появится окно **Результаты поиска решения**, в котором предлагается выбрать тип отчета: результаты, устойчивость, пределы, а также элементы *Сохранить найденное решение* или *Восстановить исходные значения*.



После нажатия кнопки *OK* в книге добавляется по листу на каждый из выбранных типов отчета: «Отчет по результатам», «Отчет по устойчивости» и «Отчет по пределам». Результаты поиска решения приведены на рис.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Продукция*	*Сок*	*Джем*	*Пюре*	*Суммарная прибыль*		
2	*Оптимальное производство*	520	0	110	41100		
3	*Прибыль от 1 кг*	60	100	90			
4							
5							
6	*Сырье*	*Расход сырья на 1 кг*			*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Яблоки 1 сорта*	3	6	4	2000	2000	
8	*Яблоки 2 сорта*	0	3	5	550	1500	
9	*Сахарный песок*	2	1,5	2	1260	1500	
10	*Лимонная кислота*	0,1	0,15	0,2	74	74	
11							
12							
13							

В ячейках B2, C2, D2 найдено оптимальное производство сока, джема и пюре $x_1^* = 520$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 110$, то есть семейной фирме необходимо реализовать, с целью получения максимальной прибыли в размере 41 100 ден. ед. (ячейка E2), 520 кг яблочного сока и 110 кг яблочного пюре. Также анализируя, вторую таблицу видим, что яблоки 1 сорта и лимонная кислота являются дефицитными ресурсами, то есть используются полностью на производстве в количестве 2 000 и 74 кг соответственно. Яблоки 2 сорта и сахарный песок же используется в количестве 550 и 1 260 кг соответственно, что составляет только часть общего количества сырья, которое имеется в наличии. Следовательно, это сырье является недефицитным. На основании сформированных отчетов проведем более полный анализ результатов расчетов компьютерной модели.

«**Отчет по результатам**» состоит из трех таблиц:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах**						
2								
3		Ячейка целевой функции (Максимум)						
4		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Окончательное значение**			
5		$E$2	Оптимальное производство	250	41100			
6								
7								
8		Ячейки переменных						
9		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Окончательное значение**	**Целочисленное**		
10		$B$2	Сок	1	520	Продолжить		
11		$C$2	Джем	1	0	Продолжить		
12		$D$2	Пюре	1	110	Продолжить		
13								
14								
15		Ограничения						
16		**Ячейка**	**Имя**	**Значение ячейки**	**Формула**	**Состояние**	**Допуск**	
17		$E$10	Лимонная кислота	74	$E$10<=$F$10	Привязка	0	
18		$E$7	Яблоки 1 сорта	2000	$E$7<=$F$7	Привязка	0	
19		$E$8	Яблоки 2 сорта	550	$E$8<=$F$8	Без привязки	950	
20		$E$9	Сахарный песок	1260	$E$9<=$F$9	Без привязки	240	
21								
22								
23								

– «*Ячейка целевой функции*»: содержит исходное и окончательное значение целевой функции. В рамках представленной задачи окончательное значение представляет собой максимальную суммарную прибыль от реализации продукции, что составляет 41 100 ден. ед.

– «*Ячейки переменных*»: содержит исходное, окончательное значение переменных и указание к вычислению целочисленного решения. В рамках рассматриваемой задачи оптимальное производство состоит из 520 кг яблочного сока и 110 кг яблочного пюре, джем выпускать согласно оптимальному плану не целесообразно.

– «*Ограничения*»: содержит результаты оптимального решения для ограничений задачи. Она состоит из значений левых частей основных ограничений задачи, зависимостей между ячейками, которые формируют эти ограничения, а также разницей между значениями правой и левой части ограничений. Эта разница записывается в таблице в столбце *Допуск* и, исходя из экономического смысла задач, означает количество сырья, которые не используются на производстве. В рассматриваемой задаче, как уже было отмечено ранее ингредиенты лимонная кислота и яблоки 1 сорта являются дефицитными ресурсами, поскольку они используются полностью, их *Допуск* равен нулю. В столбце *Состояние* этим ресурсам соответствует *привязка*, что означает равенство значений правых и левых частей ограничений. Яблоки 2 сорта и сахарный песок являются недефицитными ресурсами, их остаток при оптимальном решении составляет 950 и 240 кг, а *Состояние* является *без привязки*, так общий запас превосходит общий расход на изготовление продукции.

«**Отчет по пределам**» состоит из двух таблиц:

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах

	Целевая функция	
Ячейка	Имя	Значение
$E$2	Оптимальное производство	41100

	Переменная		Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$2	Сок	520	0	9900	520	41100
$C$2	Джем	0	0	41100	0	41100
$D$2	Пюре	110	0	31200	110	41100

Первая таблица в комментариях не нуждается, так как описывает оптимальное производство яблочной продукции. Вторая таблица указывает верхний и нижний предел значений переменных в задаче и указывает изменения значения целевой функции. Другими словами, если согласно этой таблице проанализируем яблочный сок, то видим что нижний предел этой продукции равен нулю ($x_1 = 0$), при таком значении переменной прибыль от реализации оставшейся продукции составит $f(x) = 0 \cdot 60 + 0 \cdot 100 + 110 \cdot 90 = 9900$.

Если же яблочный сок будем реализовывать в количестве 520 кг (оптимальное количество), получим максимальную прибыль в размере 41 100 ден. ед. Аналогично можно провести рассуждения для джема+ и яблочного пюре.

«**Отчет по устойчивости**» состоит из двух таблиц:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости**							
2								
3	Ячейки переменных							
4				Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
5		Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
6		$B$2	Сок	520	0	60	7,5	4,2
7		$C$2	Джем	0	-12,5	100	12,5	1E+30
8		$D$2	Пюре	110	0	90	16,7	10
9								
10	Ограничения							
11				Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
12		Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
13		$E$10	Лимонная кислота	74	150	74	13	7
14		$E$7	Яблоки 1 сорта	2000	15	2000	220	380
15		$E$8	Яблоки 2 сорта	550	0	1500	1E+30	950
16		$E$9	Сахарный песок	1260	0	1500	1E+30	240
17								

Первая таблица «*Ячейки переменных*» связана с устойчивостью оптимального решения задачи. Рассмотрим более подробно всю представленную в ней информацию:

– «*Окончательное значение*» отражено найденное оптимальное решение задачи;

– «*Приведенная стоимость*» показывает, насколько изменится максимальная прибыль в задаче в случае принудительного включения единицы нерентабельного продукта в оптимальное решение. В рассмотренном примере джем являются нерентабельной продукцией, следовательно, при производстве одного килограмма джема максимальный суммарный доход от реализации продукции уменьшится на 12,5 ден. ед.;

– «*Целевая функция. Коэффициент*» содержит стоимость одного килограмма сока, джема и пюре;

– «*Допустимое увеличение*», «*Допустимое уменьшение*» указывает максимально возможное увеличение и уменьшение стоимости соответствующей продукции, при сохранении уровня цен остальных видов продукции, которые не приведут к изменению найденного оптимального решения задачи.

Вторая таблица «*Ограничения*» содержит информацию, относящуюся к ограничениям задачи:

– «*Окончательное значение*» указано количество сырья, которые используются на производстве для реализации оптимального решения;

– «*Теневая цена*» приведены двойственные оценки ресурсов. В литературе эти оценки называют «внутренняя цена», «условная стоимость», «скрытый доход» или «объективно обусловленными оценками». Эти оценки показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальный доход от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на единицу;

– «*Ограничение. Правая сторона*» отражают количество каждого ресурса, которое имеется в наличие. Другими словами, правую часть основных ограничений задачи, описывающих использование ресурсов на производстве;

– «*Допустимое увеличение*», «*Допустимое уменьшение*» указаны предельные значения приращения ресурсов, то есть насколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом структуру оптимального решения.

Таким образом, пользуясь отчетом по устойчивости, можно провести постоптимальный анализ задачи, а именно:

– провести анализ устойчивости полученного решения при изменении стоимости продукции каждого вида;

– определить степень дефицитности ресурсов;

– установить устойчивость оптимального решения или оптимальных двойственных оценок ресурсов при изменении количества каждого ресурса;

– установить, как измениться максимальная прибыль при изменении запасов ресурсов на единицу;

– построить функции предельной эффективности ресурсов, а также найти зависимость максимальной прибыли от количества сырья, используемого на производстве.

Проанализируем данные полученные в отчете по устойчивости в рамках рассматриваемого примера. Опираясь на первую таблицу, оптимальное производство продукции представляет собой вектор $x^* = (520, 0, 110)$, а максимальная прибыль, как было найдено ранее, составляет 41 100 ден. ед. Из первой строки следует, что полученное решение сохранится, если текущая стоимость яблочного сока 60 ден. ед. может максимально увеличиться на 7,5 ден. ед. (до 67,5 ден. ед.) или уменьшиться максимально на 4,2 ден. ед. (до 55,8 ден. ед.). Другими словами, диапазон изменения стоимости килограмма яблочного сока [55,8; 67,5] ден. ед. является диапазоном устойчивости найденного оптимального решения $x^* = (520, 0, 110)$. Из второй строки следует, что полученное решение сохранится, если текущая стоимость джема 100 ден. ед. может максимально увеличиться на 12,5 ден. ед. (до 112,5 ден. ед.) или уменьшиться на любую величину (1E+30 означает бесконечно большое число). Другими словами, пока стоимость одного килограмма джема не превосходит 112,5 ден. ед. оптимальное решение $x^* = (520, 0, 110)$ не изменится. Аналогично, опираясь на третью строку таблицы, получаем диапазон изменения стоимости яблочного пюре. Текущая цена 90 ден. ед. может быть максимально увеличена на 16,7 ден. ед. или максимально уменьшена на 10 ден. ед., что не приведет к изменению оптимального производства шоколада. Таким образом, диапазон устойчивости найденного решения при изменении стоимость яблочного пюре составит [80; 106,7] ден. ед.

Исследуем характер основных ограничений в задаче. Решением двойственной задачи для рассматриваемого примера, является вектор $y^* = (150,\ 15,\ 0,\ 0)$.

Переменные $y_1^* = 150,\ y_2^* = 15,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0$ соответствуют значениям, которые стоят в столбце «*Теневая цена*». Отличные от нуля двойственные переменные соответствуют дефицитным ресурсам, а нулевые чаще всего недефицитным.

Вернемся к первой таблице, а именно к столбцу «*Приведенная стоимость*». Здесь отражаются потери прибыли при выпуске одного килограмма продукции, то есть

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная}\\ \textit{стоимость}\end{matrix} = c_j - a_{1j}y_1^* - \ldots - a_{ij}y_i^* - \ldots - a_{mj}y_m^*.$$

Согласно найденным двойственным оценкам ресурсов получаем:

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная стоимость}\\ \textit{ябочного сока}\end{matrix} = 60 - 3\cdot 15 - 0\cdot 0 - 2\cdot 0 - 0{,}1\cdot 150 = 0,$$

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная стоимость}\\ \textit{яблочного джем}\end{matrix} = 100 - 6\cdot 15 - 3\cdot 0 - 1{,}5\cdot 0 - 0{,}15\cdot 150 = -12{,}5,$$

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная стоимость}\\ \textit{яблочного пюре}\end{matrix} = 90 - 4\cdot 15 - 5\cdot 0 - 2\cdot 0 - 0{,}2\cdot 150 = 0$$

Это означает, что по выпускаемой продукции потери прибыли являются нулевыми, что и представлено в отчете.

Вернемся ко второй таблице. Анализируя, первый и третий столбец, видно, что лимонная кислота и яблоки 1 сорта являются дефицитными ресурсами, так как весь запас сырья, который имеется в наличии, используется на производстве. Яблоки 2 сорта и сахарный песок используется не полностью, при запасе в 1 500 кг используется только 550 кг яблок 2 сорта и 1 260 кг сахарного песка, что подтверждает нулевая теневая цена этого сырья, отражая его недефицитность. Поскольку лимонная кислота и яблоки 1 сорта являются дефицитными ресурсами, то любое изменение количества сырья приведет к изменению оптимального решения задачи. Таким образом, используя последние столбцы таблицы, найдем диапазоны устойчивости структуры оптимального решения (ассортимента предлагаемой продукции) и как следствие, диапазоны устойчивости двойственных оценок при изменении количества сырья.

Опираясь на первую строчку, получаем, что количество лимонной кислоты в 74 кг можно максимально увеличить на 13 кг (до 87 кг) или максимально уменьшить на 7 кг (до 67 кг), при этом ценность ресурсов и ассортимент производимого продукции не изменится. Другими словами, диапазон изменения количества лимонной кислоты (67; 87) кг является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов. Аналогично, количество яблок 1 сорта в 2 000 кг можно максимально увеличить на 220 кг или максимально уменьшить на 380 кг с сохранением структуры оптимального решения и ценности ресурсов. Таким образом, диапазон изменения количества яблок 1 сорта (1 620; 2 220) кг является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов.

Поскольку яблоки 2 сорта является недефицитным ингредиентом, то при любом увеличении (1Е+30 означает бесконечно большое число) и уменьшении максимально на 950 кг оптимальное решение задачи не изменится, что как следствие сохраняет максимальную прибыль задачи. Таким образом, диапазон изменения яблок 2 сорта $(550;\ +\infty)$ кг является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов. Аналогично рассуждая, получим диапазон изменения сахарного песка $(1260;\ +\infty)$ при котором сохраняются двойственные оценки ресурсов.

Переменные $y_1^* = 150,\ y_2^* = 15,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0$ показывают не только дефицитность и недефицитность используемых ресурсов, но и, как было отмечено ранее, характеризуют ценность одной единицы ресурса в смысле увеличения прибыли. Следовательно, при увеличении лимонной кислоты на один килограмм суммарная прибыль увеличится на 150 ден. ед., а при увеличении яблок 1 сорта на один килограмм прибыль возрастет на 15 ден. ед. Поскольку яблоки 2 сорта и сахарный песок является недефицитными ресурсам, то их увеличение не отражается на суммарном доходе.

Список рекомендуемой литературы

Аксенюшкина Е.В. Математика. Ч. 2: Нелинейное и линейное программирование / Е.В. Аксенюшкина, Н.В. Тарасенко, С.В. Тимофеев. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009.

Балдин К.В. Математические методы и модели в экономике / К.В. Балдин, В.Н. Бащлыков, А.В. Рокосуев. – Москва : Флинта, 2012.

Гаврилец Ю.Н. Целевые функции социально-экономического планирования / Ю.Н. Гаврилец. – Москва : Наука, 1983.

Гармаш А.Н. Математические методы в управлении / А.Н. Гармаш, И.В. Орлова. – Москва : Инфра-М, 2013.

Геворкян П.С. Теория вероятностей и математическая статистика / П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2016.

Глухов В.В. Математические методы и модели в менеджменте / В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко. – Санкт-Петербург : Изд-во СПбГТУ, 2000.

Горчаков А.А. Компьютерные экономико-математические модели / А.А. Горчаков, И.В. Орлова. – Москва : ЮНИТИ, 1995.

Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования / А.А. Грешилов. – Москва : Логос, 2006.

Дубров А.М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша. – Москва : Финансы и статистика, 2000.

Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы / М.Г. Зайцев, С.Е. Варюхин. – Москва : Изд. дом «Дело» РАНХиГС, 2011.

Колемаев В.А. Математические методы и модели исследования операций / В.А. Колемаев. – Москва : ЮНИТИ, 2008.

Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – Москва : ИД «Юрайт», 2010.

Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд. – Москва : ЮНИТИ, 2010.

Крыньский Х.Э. Математика для экономистов / Х.Э. Крыньский. – Москва : «Статистика», 1970.

Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов / В.В. Лебедев. – Москва : Изограф, 1997.

Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте: Руководство для будущих топ-менеджеров / А.Г. Мадера. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2012.

Мелехина Т.Л. Лекции по теории вероятностей и математической статистике / Т.Л. Мелехина. – Москва : Прометей, 2018.

Мхитарян В.С. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин, Е.В. Астафьева, Ю.Н. Миронкина ; под ред. В.С. Мхитаряна. – Москва : Маркет ДС, 2010.

Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel / И.В. Орлова. – Москва : ЗАО «Финстатинформ», 2000.

Просветов Г.И. Анализ данных с помощью Excel: задачи и решения / Г.И. Просветов. – Москва : Альфа-Пресс, 2015.

Чернов В.П. Математика для топ-менеджеров / В.П. Чернов. – Санкт-Петербург : Наука, 2002.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА В ЭКОНОМИКЕ: ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Учебное пособие

Составитель **Аксенюшкина** Елена Владимировна

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 07.02.20.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.

http://bgu.ru.